IVAN DEBELJAK, dipl. inž. i PETAR DELIĆ, profesor

PROGRAMIRANI UDŽBENIK IZ ALGEBRE

(ponavljanje i utvrđivanje osnovnog gradiva iz algebre prema programu osnovnih škola)

Z A G R E B, 1 9 7 3.
Izdanje: »Skripta« Školski centar za strojarstvo i elektrotehniku,
Zagreb, Klaićeva 7

DEBELJAK-DELIĆ

PROGRAMIRANI UDŽBENIK IZ ALGEBRE

(Ponavljanje i utvrđivanje osnovnog gradiva iz algebre prema programu osnovnih škola)

ŠKOLSKI CENTAR
za strojarstvo i elektrotehniku
Zagreb, Klaićeva 7

PREDGOVOR

Napori koje nastavnici ulažu u matematičkom obrazovanju učenika ne daju željene rezultate. Činjenica je da tu postoji više uzroka, ali je sigurno da je u srednjim školama jedan od glavnih uzroka to što učenici dolaze u srednju školu a da nisu u dovoljnoj mjeri svladali temeljno gradivo iz algebre iz osnovne škole.

Da bismo ublažili ovaj problem, Stručni aktiv za matematiku Školskog centra za strojarstvo i elektrotehniku u Zagrebu izdaje ovaj udžbenik osnovnog gradiva iz algebre, tj. ono gradivo na koje se nadograđuje algebra u srednjoj školi.

Udžbenik je programiran, a to znači da je čitavo gradivo u njemu podijeljeno na male logičke cjeline iz kojih postepeno sam učenik zaključivanjem dolazi do spoznaja i pojmova koje nije znao ili ih je zaboravio. Ovako malena logička cjelina se zove članak. Svaki članak u ovom udžbeniku učenika nešto uči, jer stalnim provjeravanjem znanja on ne može napredovati dok potpuno ne shvati dani sadržaj u članku. Učenik, dakle, ne može napredovati dok nije svladao pojmove koji prethode novim pojmovima.

Opće je mišljenje da prve poteškoće u predmetu proističu iz toga što učenik tijekom svoga matematičkog obrazovanja nije osposobljen da matematički misli, već često uči činjenice mehanički nepovezano, pa ih zbog toga lako i zaboravlja.

Posebni je problem što učenik ne zna učiti matematiku. On često misli da je dovoljno shvatiti neki pojam, a ne da taj pojam treba temeljito razraditi i utvrditi znanje na zadacima, ponavljajući ga nekoliko puta i povezujući ga s ostalim naučenim pojmovima u jednu cjelinu. Zato smo pri izradi ovog udžbenika imali u vidu i činjenicu da učenik treba ne samo da shvati pojmove nego da ih utvrđuje vježbanjem na zadacima i da je najtrajnije znanje ono do kojega je učenik došao samoučenjem.

Smatramo da ovaj udžbenik treba i dalje usavršavati, stoga molimo sve one, koji nam u tome žele pomoći, da nam pošalju svoje primjedbe na nadresu: Školski centar za strojarstvo i elektrotehniku - Izdavačka djelatnost - Zagreb, Klaićeva 7.

AUTORI

U P O Z O R E N J E !

PRIJE NEGO ZAPOČNEŠ UČENJE IZ OVOGA UDŽBENIKA OBAVEZNO PROČITAJ SLIJEDEĆE UPUTE

KAKO SE SLUŽITI OVIM UDŽBENIKOM ?

Tijelo ovog udžbenika se sastoji od niza članaka koji se nalaze na desnoj strani od vertikalne crte. U svakom članku treba nešto odgovoriti. Ispravni odgovori se nalaze lijevo od vertikalne crte za jednu stepenicu niže (tj. lijevo od slijedećeg članka).

Prije nego se započne radom, potrebno je pokriti horizontalno komadom čistog papira sve članke koji slijede iza članka koji u tom času učiš, a to znači i odgovor na pitanje u vezi sa člankom koji se uči.

Za pravilan rad ovim udžbenikom, potrebna je i bilježnica u koju ćeš upisati naslov paragrafa, a zatim redni broj svakog članka koji učiš i na desno od rednog broja članka pravilan odgovor ili rješenje postavljenog zadatka (s postupkom rješavanja).

Nakon što si pročitao prvi članak i u bilježnicu upisao odgovor, provjeri točnost odgovora, a koji se nalazi na lijevo od slijedećeg članka.

Ako je odgovor ispravan, pređi na slijedeći članak.

Ako odgovor nije ispravan, onda se ponovo vrati na članak i analiziraj zašto je zadani odgovor neispravan. Nakon toga se prelazi na slijedeći članak.

Iza svakog paragrafa se nalazi ispit znanja, koji treba da odgovori s koliko je uspjeha gradivo svladano. Ako si odgovorio na manje od 60% pitanja, treba da se vratiš na početak i ponoviš čitav postupak i ponovo izradiš ispit znanja. (Ukoliko ni sada nisi zadovoljio, potraži nekoga tko će te uputiti u rad s ovim udžbenikom).

Ako si odgovorio na 60% pitanja i više, možeš nastaviti učenjem time da prije nego ideš dalje, razjasniš još jednom pojmove koji su bili vezani uz pitanja na koja nisi dao pravilan odgovor.

Na koncu ovoga udžbenika nalazi se zbirka zadataka s uputama.

Sve zadatke je potrebno izraditi, jer se na njima utvrđuje i razrađuje izneseno gradivo, stječe vještina u računanju i učenik prisiljava na samostalno rješavanje zadataka.

Da bi imao što više uspjeha u radu ovim udžbenikom, dat ćemo ti nekoliko savjeta:

1. Nemoj preskočiti niti jedan članak.
2. Nemoj gledati unaprijed odgovore.
3. Uloži što možeš više razmišljanja prije nego dadeš odgovor.
4. Nemoj ići prebrzo, ako ti ponekad materija bude izgledala lagana.
5. Nemoj raditi ako si umoran, prekini s radom i nakon odmora nastavi.
6. Nemoj trošiti previše vremena na nekom članku u kojemu ne možeš nikako dati odgovor, jer je dozvoljeno, u iznimnim slučajevima, da se odgovor pogleda unaprijed.
7. Ako naiđeš na veće poteškoće u samostalnom radu ovim udžbenikom, potraži nečiju pomoć.
8. Analiziraj svoje pogreške.
9. Budi uporan i ne popuštaj dok ne stigneš do cilja.
10. I na koncu upamti da je najbolje matematičko znanje koje si stekao samoučenjem.

ŽELIMO TI USPJEHA U RADU !

- - . - -

Paragraf 1.

1. UVOD U PREDMET

U ovom paragrafu ćemo ukratko odgovoriti na slijedeće:

a) Što su to matematički pojmovi i kako ih dijelimo;
b) Matematički termini i matematički simboli.
c) Logička povezanost matematike.
d) Specifičnosti matematike kao školskog predmeta.

1 ______________________________

Pojmovi kojima se bavi matematika se zovu matematički pojmovi. Evo nekoliko matematičkih pojmova: jednadžba, trokut, točka, razlomak, cijeli broj itd.

Evo sada nekoliko pojmova koji nisu matematički: biljka, grad, selo, čovjek, društvo itd.

A sada ćemo nabrojiti još nekoliko pojmova: broj, životinja, zrak, operacija.

Koji su od njih matematički pojmovi?

______________________, ______________________

Napomena: Dvije crte odvojene zarezom nas upozoravaju da u radnu bilježnicu treba upisati dvije odgovarajuće riječi.

1 ____________________

broj,
operacija

Napomena: pojedini pojmovi mogu biti matematički, a također se iskorišćuju i u drugim naukama. Na primjer sigurno ste čuli da se pojam OPERACIJA upotrebljava u medicini, vojsci, a i na drugim mjestima.

2 ____________________

U matematici su tipični primjeri operacija četiri osnovne računske operacije, tj. zbrajanje, oduzimanje, množenje i dijeljenje (ima još mnogo operacija u matematici).

Možemo općenito reći da je operacija u matematici svaki postupak kojim iz zadanih matematičkih objekata izvodimo nove matematičke objekte. Npr. zbrajanjem brojeva 3 i 4 dobivamo broj 7, oduzimanjem dviju dužina dobivamo treću dužinu itd.

$\sqrt{2}$, $\left(\frac{2}{3}\right)^3$, ▭ b, a $P=a.b$

su primjeri ____________________ u matematici.

2 ____________________

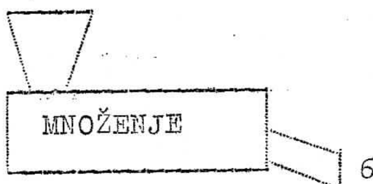
OPERACIJA

(matematičke pojmove, kojima operiramo u matematici, nazivamo matematički objekti)

3 ____________________

Svaka operacija u matematici se sastoji od: ulaza, izlaza i postupka po kojemu se iz ulaza dobije izlaz

2,3



Na slici je: ulaz ____________,

postupak __________, izlaz __________

3 ______

2, 3

MNOŽENJE

6

4 ______

definirati

4 ______

Sve pojmove u matematici dijelimo u dvije osnovne skupine, i to na:

a) nedefinirane pojmove

b) definirane pojmove

Prvo se izabere mali broj nedefiniranih (osnovnih) pojmova uz pomoć kojih se definiraju novi pojmovi koje onda nazivamo definiranim.

Evo nekoliko nedefiniranih pojmova: točka, element, istinito, lažno itd.

Evo nekoliko definiranih pojmova: dužina, korjenovanje, romb, prirodni broj, funkcija itd.

Matematika je precizna nauka i zato je potrebno sve nove pojmove precizno odrediti ili kako to matematički kažemo

______

5 ______

Riječi kojima se označavaju pojedini matematički pojmovi se zovu matematički TERMINI. Npr. suma, produkt, član, faktor, jednakost, jednadžba, funkcija su matematički ______

5 ______________

TERMINI

6 ______________

Matematika se za označavanje svojih pojmova služi posebnim znakovima ili SIMBOLIMA.

Npr. + , - , x, y, =, <, >, itd. su matematički ______________

6 ______________

SIMBOLI

7 ______________

Važno je napomenuti da u svakoj situaciji precizno treba znati značenje svakog simbola jer se ponekad isti simbol pojavljuje s različitim značenjem. Npr. simbol (-) se može pojaviti kao predznak broja, a može se pojaviti kao znak za operaciju oduzimanja.

Npr.

(-5) - ovdje je (-) ______________ broja

(a-b) - " (-) ______________ za oduzimanje

7 ______________

predznak

znak

8 ______________

{ } - ovaj simbol poznaješ pod nazivom vitičasta zagrada, a služi za grupiranje npr. $\{a - (b+1)\}^2$. Međutim ona se upotrebljava i u drugom značenju. Npr. ako pišemo S= {a, e, i , o, u }, onda ovo znači skup S čiji su elementi svi samoglasnici u našem jeziku

Neki skup S smatramo poznatim, ako znademo što su njegovi elementi.

Da npr. slovo a pripada skupu S simbolički, pišemo $a \in S$.

Da slovo b ne pripada skupu S simbolički, pišemo $b \notin S$.

Napiši simbolički da slovo e pripada skupu S __________, a da slovo k ne pripada skupu S __________.

8

$e \in S$

$k \notin S$

9

A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0}

Ovo je skup svih arapskih znamenaka (simbola) uz pomoć kojih pišemo brojeve. Npr. komponirajući znamenke 3, 5, 7, možemo napisati različite brojeve: 357, 375, 735 itd.

Napišite skup svih rimskih znamenaka

R = {____________________}

(razlikuj pojmove broj i znamenka)

9

R = {I, V, X, L, C, D, M}

Znademo da su rimske znamenke sve manje u upotrebi

10

Napišite broj 1973 pomoću rimskih znamenaka __________

lo

MDCCCCLXXIII

11

Svi imaju po 3 (tri) elementa

12

jesu

(pojam broja se, dakle, poopćuje ili generalizira)

11

$\{a, b, c\}$, $\{x, y, z\}$, $\{2, +, a\}$

Ovdje su zadana tri različita skupa, ali oni imaju jedno zajedničko svojstvo.

Koje im je to svojstvo zajedničko?

____

12

Brojeći elemente skupova, dolazimo do brojeva kao što su 1, 2, 3, 4, 5 .. .., a zovemo ih PRIRODNI brojevi.

Da li su i ovo brojevi?

-5, $\frac{2}{3}$, $\sqrt{3}$, itd.

____________ (jesu ili nisu?)

13

U matematici se služimo posebnim i općim brojevima. Dok je npr. površina kvadrata kojemu je stranica duga 5 cm velika 25 cm^2, površina kvadrata kojemu je stranica duga a cm iznosi a^2 cm^2.

a se ovdje zove OPĆI broj jer on ovdje može poprimiti bilo koju pozitivnu vrijednost.

Isto tako su: b, c, d, x, y, ...

____________________ (opći ili posebni) brojevi.

13 ______

OPĆI

14 ______

nisu

15 ______

Lažna je samo izjava pod b)

(izjava pod d) je istinita jer je ovdje π = 3, 14..., tj. poznata konstanta ili posebni broj)

14 ______

Rečenice kao što su:

a) U pravokutniku su dijagonale jednake

b) 1o je djeljiv brojem 3

c) -4 je negativan broj

d) π nije opći broj

u matematici nazivamo IZJAVAMA ili logičkim sudovima. To su rečenice koje nešto tvrde, a one mogu biti istinite ili lažne. Rečenice za koje se ne može utvrditi da li su istinite ili lažne ______ (jesu ili nisu) izjave.

15 ______

Koja je od izjava iz prošlog članka lažna? ______

16 ______

Evo sada nekoliko rečenica koje nisu izjave:

a) Je li gotov ručak?

b) Zdravo drugovi!

c) Je si li naučio lekciju?

Ovo nisu izjave jer se njima ništa ne tvrdi niti se negira. Za njih ne možemo reći da li su ______ ili ______.

16

ISTINITE

LAŽNE

17

Svaka istinita izjava da neki matematički pojam ima određeno svojstvo se naziva POUČAK ili TEOREM.

Evo nekoliko poučaka:

a) Ako je $a = b$, onda je $b = a$

b) $c^2 = a^2+b^2$ (a, b, c su stranice u pravokutnom trokutu)

c) Ako je $2x = 4$, onda je $x = 2$

d) $\sqrt{2}$ se ne može napisati u obliku razlomka kojemu su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

Poučci pod b, c, d se dokazuju, dok se izjava pod a ne dokazuje. Osnovne izjave koje se ne dokazuju nazivamo

____________________.

17

AKSIOMI

18

Ako neki poučak izvedemo iz nekog drugog poučka ili aksioma kažemo da smo ga dokazali.

Npr. o trokutu znademo ove poučke:

a) Suma unutarnjih kutova iznaša 180°

b) Nasuprot jednakim stranicama leže jednaki kutovi.

(oba poučka se dokazuju)

Iz poučaka a i b slijedi poučak da svaki unutarnji kut u istostraničnom trokutu iznosi 60°.

Neka izjava P glasi: trokut je istostraničan, a izjava T neka glasi: svaki unutarnji kut u istostraničnom trokutu iznosi 60°.

Onda simbolički možemo pisati ovako

Ako P onda T	ili	$P \Longrightarrow T$

Kažemo da iz izjave P slijedi ili proizlazi izjava T.

Kod dokaza se P naziva protpostavka, a T tvrdnja.

Dakle poučci se LOGIČKI izvode jedan iz drugoga. Zato je ________________ povezivanje gradiva nužan uvjet da se matematika nauči.

18 LOGIČKO

19

Na osnovu rečenog u ovom paragrafu možemo istaknuti glavne specifičnosti matematike kao nastavnog predmeta.

1. matematički su pojmovi OPĆENITI i APSTRAKTNI
2. matematika se služi posebnim znacima ili SIMBOLIMA
3. matematičko gradivo je LOGIČKI povezano
4. u matematici se traži PRECIZNOST izražavanja i rezultata
5. u matematici se ustraje na SAMOSTALNOM rješavanju zadataka.

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 1.

I - Matematički pojmovi

Pojmovi kojima se bavi matematika se zovu matematički pojmovi. Dijolimo ih na nedefinirane i definirane. Svaki novi pojam treba definirati.

II - Matematički termini i simboli

Riječi kojima se označavaju pojedini matematički pojmovi se zovu matematički TERMINI. Matematika se za označavanje svojih pojmova služi posebnim znakovima ili SIMBOLIMA. U svakoj situaciji precizno treba znati značenje svakog simbola jer se ponekad isti simbol pojavljuje sa različitim značenjem.

III- Logička povezanost matematike

Čitava matematika je jedna logički povezana struktura koja počiva na grupi osnovnih pojmova (nedefinirani pojmovi) i grupi osnovnih izjava (aksiomi). Novi pojmovi se definiraju, a nove istinite izjave se dokazuju.

Zato je LOGIČKO povezivanje matematičkog gradiva nužan uvjet da se matematika nauči.

- - o - -

I ISPIT ZNANJA

1. Matematičke pojmove dijelimo na ______________ i ______________ .

2. Rečenice koje nešto tvrde, a mogu biti ISTINITE ili LAŽNE (ali ne istodobno istinite i lažne) u matematici nazivamo izjavama (da ili ne).

3. Osnovne izjave koje ne dokazujemo u matematici nazivamo ________ .

4. Riječi kojima se označavaju pojedini matematički pojmovi se zovu matematički ______________ .

5. Koji se termini pojavljuju u vezi s operacijom dijeljenja?

   ______________ , ______________ , ______________

6. Napiši skup svih arapskih znamenaka.

   A = {______________________________}

7. Znamenka ili cifra su različiti termini za isti matematički pojam

   (da ili ne)

8. Broj i znamenka su različiti termini za isti matematički pojam

   (da ili ne).

9. Napiši pomoću simbola da točka A pripada pravcu.

   p (..........A..........p..........).

10. Napiši pomoću simbola slijedeću izjavu:

    Ako je a veće od b, onda je i 5a veće od 5b.

ODGOVORI NA I ISPIT ZNANJA

1. definirane i nedefinirane
2. da
3. aksiomi
4. termini
5. divident, divizor, kvocijent
6. $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
7. da
8. ne (broj i znamenka su sasvim različiti pojmovi. Znamenke su simboli ili znakovi kojima pišemo brojeve)
9. $A \in p$
10. $(a > b) \Longrightarrow (5a > 5b)$

> MATEMATIKA STVARNO KORISNA DANAS -
>
> - TO JE MODERNA MATEMATIKA
>
> G.PAPY

Paragraf 2.

VAŽNI POJMOVI O CIJELIM BROJEVIMA

U ovom paragrafu ćemo ponoviti najvažnije pojmove koji dolaze uz cijele brojeve.

1 KOJI SU TO CIJELI BROJEVI

Čuli ste za brojeve kao što su:

...-3, -2, -1, 0, +1, +2, +3,...

Ovakve brojeve nazivamo cijelim brojevima.

Svih cijelih brojeva ima________________

(konačno ili beskonačno)

1

beskonačno

(Na beskonačnost nas upozoravaju tri točke, što simbolički znači i tako dalje, dokle bez kraja)

2

Svaki od brojeva:

+14, -375, 0, -2, 78573

se naziva____________________ brojem

2

cijelim

3

Brojevi kao što su:

$+\frac{2}{3}$; $-0,25$; $+\sqrt{2}$; $-\frac{10}{7}$

__________ (jesu ili nisu) cijeli brojevi

3 ______

nisu

4 ______

Primijetimo da svaki od cijelih brojeva ima predznak (+ ili –) koji mu je pridružen osim broja ______.

4 ______

0 (nula)

5 ______

Brojeve +1, +2, +3, +4,...
nazivamo pozitivni cijeli brojevi.

Brojeve –1, –2, –3, –4,...
nazivamo negativni cijeli brojevi.

Svi cijeli brojevi se dakle sastoje od:

______, ______,

______

5 ______

pozitivnih cijelih brojeva, negativnih cijelih brojeva i od broja nula.

6 ______

Ubuduće, ako ne pišemo predznak, smatrat ćemo da je broj pozitivan (to je samo dogovor).

Koji su od navedenih brojeva pozitivni?

385, –385, 62, 0, –8

6 ______

385, 62

(Broj 0 nije pozitivan niti negativan)

7 ______

Pozitivni cijeli brojevi, tj. 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... još se nazivaju PRIRODNI brojevi.

Koji su od navedenih brojeva prirodni brojevi ?

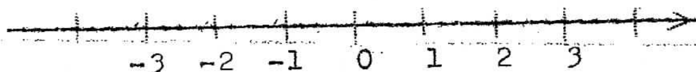
-7; $\frac{5}{8}$; 1825; 12,3; 0, $\sqrt{3}$

7

Samo 1825

8

Između svih cijelih brojeva i točaka na pravcu uspostavljamo pridruživanje kao što slika pokazuje.



Na ovako dobivenom brojevnom pravcu desno od nule leže ______________ cijeli brojevi, dok lijevo od nule leže ______________ cijeli brojevi.

8

pozitivni
negativni

9

BROJ NULA je jedini broj koji nema predznak. Nula je, dakle, broj koji nije pozitivan niti negativan. Ona je na granici pozitivnih i negativnih brojeva.

Za računanje nulom postoje posebna i interesantna pravila.

Prisjetimo se nekih na zadacima za svaki broj a (a je opći broj)

1) a + 0 = ________

2) a - 0 = ________

3) a . 0 = ________

9

1) a

2) a

3) 0

lo 12

Što znademo o dijeljenju nulom ?

lo

Dijeljenje nulom nije definirano

NIKADA NE DIJELITI NULOM !

11 13

Što znademo o dijeljenju nule, tj. čemu je jednako

1) 0 : 5 =

2) 0 : a =

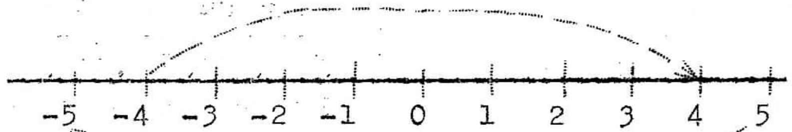
(a je ovdje opći broj, tj. bilo koji broj, samo ne nula, jer smo naglasili da dijeljenje nulom nije definirano) 14

11

1) 0

2) 0 $(a \neq 0)$

12



Ako kažemo da je broju 5 suprotan broj -5, broju -4 broj 4 itd., koji je onda broj suprotan zadanom broju ?

1) 2

2) -3

3) a

4) -a

12

1) -2
2) 3
3) -a
4) a

13

Ako je a pozitivni broj, onda je
-a ________________ broj.
(pozitivan ili negativan)

13

negativan

14

Ako je a negativan broj, onda je
-a ________________ broj
(pozitivan ili negativan)

14

pozitivan

15 APSOLUTNA VRIJEDNOST BROJA

Neka je a bilo koji broj, onda se definira apsolutna vrijednost broja a, što se označava $|a|$, ovako:

$\|a\| = a$	, ako je a pozitivan
$\|a\| = -a$	, ako je a negativan
$\|a\| = 0$	, ako je a nula

Dakle, bio a pozitivan ili negativan njegova apsolutna vrijednost je ____________ broj (pozitivan ili negativan)

Npr. $|-5| = 5$ $\quad \left|-\frac{3}{4}\right| = \frac{3}{4}$

$|5| = 5$ $\quad |0,3| = 0,3$

15 ———

pozitivan

16 ———

$|x|$ se čita:

"__________, __________ od x"

16 ———

apsolutna vrijednost

17 ———

Odredi:

1) $|-2| =$ 3) $\left|\frac{7}{8}\right| =$

2) $|0|$ 4) $|4 - 7| =$

17 ———

1) 2

2) 0

3) $\frac{7}{8}$

4) $|4-7| = |-3| = 3$

18 ——— RELACIJA PORETKA ———

Uvodimo simbole koji se čitaju:

"$>$" veće od

"$<$" manje od

Npr. $5>4$ čitamo: 5 je veće od 4

$a>b$ se čita: "__________"

$c<d$ se čita: "__________"

18 ———

"a je veće od b"

"c je manje od d"

19 ———

Skup svih cijelih brojeva (a i ostalih brojeva koje si učio tj. razlomaka i decimalnih brojeva) je uređen skup. To znači da ćemo uvijek moći odgovoriti koji je od dva zadana broja veći (ili manji) od drugoga. Prilikom toga pozivat ćemo se na definiciju:

$a > b$,	ako je	$a - b$	pozitivno
$a < b$,	ako je	$a - b$	negativno

Npr.- budući da je $8 - (-3) = 5$, onda je:

5 ________ -3 ($>$ ili $<$)

19 ————

$5 > -3$

20 ————

Stavi odgovarajući znak nejednakosti između parova zadanih brojeva.

1) -4 ________ 3

2) -4 ________ -7

3) $\frac{2}{3}$ ________ $0,75$

20 ————

1) $-4 < 3$

2) $-4 > -7$

3) $\frac{2}{3} < 0,75$

21 ————

Stavi odgovarajući znak nejednakosti između parova zadanih brojeva.

1) -8 $\quad$ 0

2) 8 $\quad$ 0

3) a $\quad$ 0 (a je pozitivan)

4) b $\quad$ 0 (b je negativan)

21

1) $-8 < 0$

2) $8 > 0$

3) $a > 0$

4) $b < 0$

22

$a > 0$

$b < 0$

23

istinito za $x < 0$
(za sve negativne brojeve)

lažno za $x > 0$
(za sve pozitivne brojeve)

24

Općenito nije istinit zaključak pod 3. On je istinit samo u slučaju ako je $c > 0$ (c je pozitivno)

22

Kako možemo simbolički napisati da je općenito broj:

a pozitivan ______

b negativan ______

23

Za koje je vrijednosti od x nejednakost $-x > 0$ istinita, a za koje lažna ?

$-x > 0$ je istinito za x ______

$-x > 0$ je lažno za x ______

24

Koji od slijedećih zaključaka nije istinit

1) Ako je $a > b$, onda je $b < a$

2) Ako je $c < d$, onda je $d > c$

3) Ako je $a > b$, onda je $a \cdot c > b \cdot c$

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 2

I Cijeli brojevi

a) Brojevi ... $-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots$ se nazivaju cijeli brojevi

b) Oni se sastoje od negativnih cijelih brojeva, pozitivnih cijelih brojeva (ili prirodnih brojeva) i nule.

c) Svaki cijeli broj ima predznak, osim broja nula.
(Napomena: i svi ostali brojevi imaju predznak, osim nule)

II Apsolutna vrijednost broja a

Definicija:

$|a| = a$, ako je $a \geq 0$

$|a| = -a$, ako je $a < 0$

(Napomena: znak "$\geq$" se čita: "veće ili jednako". Gornja definicija vrijedi općenito, tj. za sve brojeve, a ne samo za cijele brojeve)

III Relacija poretka

Definicija:

$a > b$, ako je $a - b$ pozitivno

$a < b$, ako je $a - b$ negativno

(Napomena: i ova definicija vrijedi za sve brojeve, a ne samo za cijele brojeve).

- - . - -

II ISPIT ZNANJA

1. Cijeli pozitivni brojevi se još nazivaju ____________ brojevi.

2. Svih prirodnih brojeva ima ____________
(konačno ili beskonačno)

3. Je li skup svih cijelih brojeva uređen po veličini ? ________
(da ili ne)

4. Na brojnom pravcu uvijek je veći onaj broj koji je na ____________
od drugoga (lijevo ili desno)

5. Slijedeće relacije poretka se čitaju

a) $x > y$ " x je ____________ y "

b) $x \geqslant y$ " x je ____________ y "

c) $x < y$ " x je ____________ y "

d) $x \leqslant y$ " x je ____________ y "

6. Pod kojim slovom izjava nije istinita? (Nije istinita samo jedna)

a) $0 < \frac{1}{2}$ c) $a > a$

b) $-9 < -8$ d) $6 \geqslant 6$

7. Neka je x bilo koji cijeli broj različit od nule, onda je
$-|x|$ uvijek ________________ (pozitivan ili negativan)

8. Neka su a, b, c prirodni brojevi. Koja relacija postoji između
a i b, ako je $a = b + c$?

ODGOVORI NA II ISPIT ZNANJA

1. prirodni

2. beskonačno

3. da

4. desno

5. a) je veće od

   b) je veće ili jednako od

   c) je manje od

   d) je manje ili jednako od

6. c

7. negativan

8. $a > b$

U MATEMATICI NEMA
KRALJEVSKIH PUTEVA

1 -

- - o - -

Paragraf 3

RAČUNANJE U SKUPU CIJELIH BROJEVA

U ovom paragrafu ćemo govoriti o zbrajanju, oduzimanju i množenju cijelih brojeva. O dijeljenju cijelih brojeva ovdje ne će biti govora zbog toga što općenito dijeljenjem cijelih brojeva rezultat nije cijeli broj. Dijeljenje cijelih brojeva općenito vodi na pojam razlomka, a o razlomcima će biti govora u jednom od slijedećih paragrafa.

1 ______________________________

Prilikom računanja cijelim brojevima općenito je poteškoća u operiranju predznacima, zato će posebna pažnja ovdje biti posvećena PRAVILIMA O PREDZNACIMA.

U čemu se najčešće griješi prilikom računanja cijelim brojevima.

U ______________________________

1 ______________________________

predznacima

2 ______________________________

a) Napiši bilo koja dva cijela broja koji imaju:

a) iste predznake ______________________________

b) suprotne predznake ______________________________

2

a) Npr.: 5, 8

ili (-4), (-7)

b) Npr.: 2, (-3)

ili (-5), 9

3

-25

3

Za ZBRAJANJE cijelih brojeva dat ćemo dva osnovna pravila.

Ako cijeli brojevi a i b imaju iste predznake, tada zbrajamo njihove apsolutne vrijednosti, a predznak ostaje isti kao što su ga imali pribrojnici.

Npr.

a) 12 + 15 = 27

b) (-12) + (-15) = -27

Izračunaj: (-8) + (-17) = ____________

4

Ako cijeli brojevi a i b imaju različite predznake, onda oduzimamo od veće apsolutne vrijednosti manju apsolutnu vrijednost i rezultatu dajemo predznak pribrojnika koji je imao veću apsolutnu vrijednost.

Npr. (-8) + 5 = ?

$|-8| > |5|$ 8 - 5 = 3

To jest:

(-8) + 5 = -3

Izračunaj: 14 + (-19) = ____________

4

5

a

b

4

-5

5

Korisno je primijetiti da znak MINUS (-) ima DVOSTRUKO značenje. On može biti predznak broja, a može **biti znak za oduzimanje.**

Npr. znak minus

a) 18 - 12 kao ____________

b) -3, $-\frac{2}{5}$,... kao ____________

5

a) znak za oduzimanje

b) predznak broja

6

U vezi sa dvostrukim značenjem znaka minus dajemo slijedeća pravila:

$-(+a) = -a$
$-(-a) = +a$

Napiši bez zagrade:

a) $-(+8) =$ ____________

b) $-(-7) =$ ____________

j-

t.

6

a) -8

b) +7 ili 7

7

ne

8

$-(-15) = 15$

7

Gornje pravilo obično iskazujemo riječima ovako:

"Ako je pred zagradom minus, u zagradi mijenjamo predznak"

Ako je pred zagradom plus, mijenjamo li i onda u zagradi predznak ? ________
(da ili ne)

8

Za svaki cijeli broj a postoji suprotan (simetričan) cijeli broj -a sa svojstvom da je $a + (-a) = 0$.

Tako je broju -8 suprotan broj 8, jer je $-8+[-(-8)] = -8 + 8 = 0$

Koji je broj suprotan broju -15

____

9

ODUZIMANJE cijelih brojeva svodimo na zbrajanje suprotnog broja suptrahendu, tj.

$a - b = a + (-b)$

9

lo

11

Npr.

-8 - (-5) = -8 + [- (-5)] =

= -8 + 5 = -3

Izračunaj: (+7) - (+15) = ________

9

(+7) - (+15) =

= 7 + (-15) = -8

10

MNOŽENJE dvaju cijelih brojeva se svodi na množenje njihovih apsolutnih vrijednosti. Rezultat je pozitivan ako su oba faktora istog predznaka, a negativan ako su faktori suprotnog predznaka.

Npr.

a) (-4) . (-6) = 24

b) (-4) . (+6) = -24

c) (+4) . (-6) = ______

d) (+4) . (+6) = ______

10

c) -24

d) 24

11

Produkt od dva negativna broja ima ____________ predznak, dok produkt od negativnog i pozitivnog broja ima ____________ predznak.

11

pozitivan (+)

negativan (-)

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 3.

I - ZBRAJANJE cijelih brojeva

Ako cijeli brojevi a i b imaju iste predznake, tada zbrajamo njihove apsolutne vrijednosti, a predznak ostaje isti kao što su ga imali pribrojnici.

Ako cijeli brojevi a i b imaju različite predznake, onda oduzimamo od veće apsolutne vrijednosti manju apsolutnu vrijednost i rezultatu dajemo predznak pribrojnika koji je imao veću apsolutnu vrijednost.

II - Pravila sa PREDZNACIMA

$$-(+a) = -a$$

$$-(-a) = +a$$

III - ODUZIMANJE cijelog broja b od cijelog broja a svodimo na zbrajanje po pravilu

$$a - b = a + (-b)$$

IV - PRODUKT dvaju cijelih brojeva je pozitivan ako su oba faktora istog predznaka, dok je negativan ako su faktori suprotnog predznaka.

- - . - -

III - ISPIT ZNANJA

1. Koja formula nije ispravna ?

   a) $(+a).(+b) = +(ab)$
   b) $(+a).(-b) = -(ab)$
   c) $(-a).(+b) = -(ab)$
   d) $(-a).(-b) = +(ab)$

2. Izračunaj:

   a) $(+5)+(+13) =$
   b) $(+20)+(-14) =$
   c) $(-5)+(-13) =$
   d) $(-9)+(+23) =$
   e) $(+7)-(+3) =$
   f) $(+7)-(-3) =$
   g) $(-7)-(+3) =$
   h) $(-7)-(-3) =$

3. Izračunaj:

   a) $(+4).(+7) =$
   b) $(+4).(-7) =$
   c) $(-4).(+7) =$
   d) $(-4).(-7) =$
   e) $0 + 0 =$
   f) $5 - 0 =$
   g) $0 - 5 =$
   h) $5 . 0 =$

4. a) Ako je $a = -2$, onda je $-a =$
   b) Ako je $-a = -3$, onda je $a =$
   c) Ako je $-b = 5$, onda je $b =$

5. a) $-(3+5) = -3-5 = -8$
   b) $-(3-5) =$
   c) $-(-3+5) =$
   d) $-(x+y) =$
   e) $-(-x+3) =$
   f) $-(-a-b) =$

- - . - -

ODGOVORI NA III ISPIT ZNANJA

1. d) (-a).(-b) = +(ab)

2. a) 18

   b) 6

   c) -18

   d) 14

   e) 4

   f) 1o

   g) -1o

   h) -4

3. a) 28

   b) -28

   c) -28

   d) 28

   e) 0

   f) 5

   g) -5

   h) 0

4. a) -a = 2

   b) a = 3

   c) b = -5

5. a) -3-5 = -8

   b) -3+5 = 2

   c) 3-5 = -2

   d) -x-y

   e) x-3

   f) a+b

-- o --

Paragraf 4

ZAKONI ZA RAČUNSKE OPERACIJE

U ovom paragrafu će biti govora o zakonima komutacije, asocijacije i distribucije i njihovoj primjeni pri računanju.

Također će biti govora o vrstama i upotrebi zagrada.

1

Je li ispravna ova jednakost

$5 + (-3) = (-3) + 5$?

(da ili ne)

1

da

2

Gornje svojstvo možemo općenito napisati

$$\boxed{a + b = b + a}$$

i nazivamo ga zakon KOMUTACIJE za zbrajanje.

Ako pišemo $x + 3 = 3 + x$, onda je to po zakonu ______________ za zbrajanje.

2 ________________

komutacije

3 ________________

ne mijenja

4 ________________

$a \cdot b = b \cdot a$

5 ________________

ne vrijedi

3 ________________

Riječima zakon komutacije za zbrajanje glasi: "suma se ________________ (mijenja ili ne mijenja), ako pribrojnici zamijene svoja mjesta.

4 ________________

Zakon komutacije vrijedi i za množenje. Napišite ga općenito

____

5 ________________

$10 - (-8) = 18 \qquad (-8) - 10 = -18$

Ovaj primjer pokazuje da za oduzimanje ________________ (vrijedi ili ne vrijedi) zakon komutacije.

6 ________________

Ako pišemo $(a+b) + c$, onda ovo znači da najprije moramo zbrojiti a i b, i tada zbrojiti c toj sumi.

Slično $a + (b+c)$ znači da najprije moramo zbrojiti ______ i ______, i tada zbrojiti ______ toj sumi

6

b i c

a

7

U prošlom članku smo se služili OKRUGLOM zagradom.

Kako se u matematici nazivaju ovakove zagrade ?

a) [ ] ____________

b) { } ____________

7

a) UGLATA

b) VITIČASTA

8

U matematici se zagradama najčešće služimo za grupiranje, što znači da ono što stavljamo u zagradu shvaćamo kao posebnu cjelinu. Npr. ako od trostruke sume brojeva a i b želimo oduzeti razliku brojeva a i b, pisali bismo ovako:

$3(a+b) - (a-b)$

Kako bi uz pomoć zagrada napisao da od trostruke razlike brojeva a i b treba oduzeti dvostruku sumu brojeva a i b.

8

$3(a-b) - 2(a+b)$

9

Kako bismo riješili ovaj zadatak?

$17 + (-15) + (-10) =$

Možemo na više načina:

a) Grupirajmo prva dva člana

$[17+(-15)] + (-10) = [+2] + (-10) = -8$

b) Grupirajmo zadnja dva člana

$17+[(-15)+(-10)] = 17+[-25] = -8$

Je li različito grupiranje člana utjecalo na konačni rezultat zbrajanja ?

_______________ (da ili ne)

9

ne

10

Gornju zakonitost općenito pišemo ovako:

$$(a+b) + c = a + (b+c)$$

i nazivamo zakon ASOCIJACIJE za zbrajanje

$2x + (3y + z) = (2x + 3y) + z$ po zakonu _______________ za zbrajanje.

10 ___

asocijacije

11 ___

Slično zakon ASOCIJACIJE za množenje kaže da je

$a \cdot (b \cdot c) =$ ______________

11 ___

$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

12 ___

$(13-5) - 10 = 8 - 10 = -2$

$13-(5-10) = 13-(-5) = 13 + 5 = 18$

Ovaj primjer pokazuje da za oduzimanje ______________ (vrijedi ili ne vrijedi) zakon asocijacije.

12 ___

ne vrijedi

13 ___

Zakon DISTRIBUCIJE množenja prema zbrajanju glasi:

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

Na temelju ovoga zakona

$5(x + 3) =$ ______________

13 ______

5x + 15

14 ______

2x - 6

15 ______

a) a + b = b + a

b) a . b = b . a

16 ______

a) (a+b) + c = a + (b+c)

b) a . (b.c) = (a.b) . c

14 ______

Slično:

$2\left[x + (-3)\right] = 2\left[x - 3\right] =$ ______

15 ______

Napišite općenito zakon KOMUTACIJE za:

a) zbrajanje ______

b) množenje ______

16 ______

Napišite općenito zakon ASOCIJACIJE za

a) zbrajanje ______

b) množenje ______

17 ______

Napišite općenito zakon DISTRIBUCIJE množenja prema zbrajanju ______

17

18

19

2o

17 ______

a.(b+c) = a . b + a . c

18 ______

komutacije

za množenje

19 ______

distribucije

množenja

zbrajanju

20 ______

distribucije

množenja

zbrajanja

18 ______

a.(b+c) = (b+c).a po zakonu

______ za ______

19 ______

(a+2).(a+5) = (a+2).a + (a+2).5

po zakonu ______,

______ prema ______

20 ______

5x + 5y = 5(x+y)

U ovom zadatku smo izlučili zajednički faktor.

Izlučivanje zajedničkog faktora se temelji na zakonu ______,

______ prema ______

21 ______

Izluči zajednički faktor

ax + a = ______

21

$a(x+1)$

22

a) zakon asocijacije za množenje

b) zakon distribucije

c) zakon komutacije za množenje

d) zakon komutacije za zbrajanje

22

U slijedećim primjerima će biti upotrebljen jedan od zakona. Odgovori, koji je upotrijebljen u svakom primjeru

a) $3.(5x) = (3.5)x$ ______

b) $2a + 5a = (2+5)a$ ______

c) $(x.5).x = (5.x).x$ ______

d) $5a + (2+3a) = 5a + (3a+2)$ ______

23

Sada ćemo riješiti jedan zadatak. Pri svakom koraku prilikom rješavanja poslužili smo se jednim zakonom.

Odgovori koji je upotrebljen pri svakom koraku:

$(x+2)\ (x+3) =$

a) $= x(x+3) + 2(x+3) =$

b) $= x\ .\ x + x\ .\ 3 + 2\ .\ x + 2\ .\ 3 =$

c) $= x^2 + 3\ .\ x + 2\ .\ x + 6 =$

d) $= x^2 + (3+2)x + 6 =$

$= x^2 + 5x + 6$

23

24

23

a) distribucija

b) distribucija

c) komutacija

d) distribucija

24

a) distribucija

b) komutacija

c) pravilo o oduzimanju, tj. $a - b = a + (-b)$

d) zakon asocijacije

24

I u ovom primjeru odgovori kojim smo se zakonom služili pri svakom koraku

$7x - (5x-3y) = 7x - 1(5x-3y) =$

a) $= 7x - 1.(5x) - 1.(-3y) =$ ____________

b) $= 7x - 5x + 3y =$ ____________

c) $= 7x + (-5x) + 3y =$ ____________

d) $= \left[7x + (-5x)\right] + 3y =$ ____________

$= 2x + 3y$

25

Sigurno si primjetio da ovako sitnim koracima obično ne rješavamo zadatke. Primjer je pokazao samo pravilnu upotrebu postavljenih zakona i pravila.

Kada steknemo vještinu u računanju, onda mi gornji zadatak rješavamo ovako:

$7x - (5x-3y) = 7x - 5x + 3y = 2x + 3y$

Ovdje smo primjenili pravilo o oslobađanju zagrade koje glasi:

"Ako je pred zagradom minus (-), onda u zagradi svim članovima mijenjamo predznak"

Ovaj zakon je posljedica zakona

_________________ množenja prema zbrajanju.

25

distribucije

(jer ako je pred zagradom minus (-), onda se on može zamijeniti sa (-1), a onda po zakonu distribucije množenja prema zbrajanju množimo sve članove u zagradi sa (-1). Zbog toga nastaje promjena predznaka kod svih članova u zagradi)

26

Ako u zadatku dolazi više zagrada, onda se zagrada rješavamo iznutra prema vani. Razjasnimo ovo na primjeru.

$3 - \left[4a - \left\{2b - 2\ (a-b)\right\}\right] =$

Ovdje je okrugla zagrada unutar vitičaste i uglate, zato ćemo se prvo riješiti okrugle zagrade

$= 3 - \left[4a - \left\{2b - 2a + 2b\right\}\right] =$

Sada je vitičasta zagrada unutar uglate, zato ćemo se sada rješavati vitičaste zagrade

$= 3 - \left[4a - 2b + 2a - 2b\right] =$ __________

(Završi zadatak tako da na koncu reduciraš istoimene članove)

26

$3 - 6a + 4b =$

$= -6a + 4b + 3$

Napomena:
Obično se okrugla zagrada piše u uglatu, a uglata

27

Oslobodi se zagrada, a zatim izračunaj:

a) $5 - 8 - \left[4 - (3-5) - 1\right] =$

b) $3x - \left[2y - (x-2y)\right] =$

c) $2x - 3\left\{x + 2\left[y - 3(x+2y)\right] - 2\right\} =$

u vitičastu, ali to nije opće pravilo kao što je i naš primjer pokazao.

27

a) -8

b) $4x - 4y = 4(x-y)$

c) $17x + 30y + 6$

d) $-8x + 1$

28

Vrijede za sve realne brojeve.

d) $-(3x-5) - \{3x + [3x + (4-x)]\} =$

Napomena: Ovdje su x, y OPĆI brojevi

28

Na koncu možemo postaviti pitanje: "Vrijede li naučeni zakoni (komutacije, asocijacije i distribucije) samo za cijele brojeve ili vrijede sasvim općenito za sve realne brojeve ?"

Napomena: Svi brojevi koje si susreo u osnovnoj školi, npr.

$-2, 5, \frac{2}{3}, 0, 0.3, 2, \ldots$, zovu se jednim imenom REALNI brojevi.

- - . - -

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 4.

I - Zakoni za računske operacije

a) Zakon komutacije

$a + b = b + a$, $a \cdot b = b \cdot a$

b) Zakon asocijacije

$(a+b) + c = a + (b+c)$, $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$

c) Zakon distribucije:

$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$

II - Zagrade

( ) - okrugla

[ ] - uglata

{ } - vitičasta

a) Zagrade služe kao simboli za grupiranje. (Što znači da se ono što smo stavili u zagradu promatra kao posebna cjelina)

b) Ako odjednom dolazi više vrsta zagrada, onda ih se oslobađamo iznutra prema vani.

c) Ako je pred zagradom (-) [tj. (-1)], onda svim članovima u zagradi mijenjamo predznak (što je u skladu sa zakonom distribucije).

- - . - -

IV. ISPIT ZNANJA

1. Odgovori po kojem zakonu je svaka od navedenih jednakosti opravdana

a) $5x \cdot 3 = 3 \cdot 5x$ ____________________

b) $3 + (2+3x) = (3+2) + 3x$ ____________________

c) $ax^2 + ab = a(x^2+b)$ ____________________

d) $-(a-b) = -a + b$ ____________________

2. Napiši i provjeri zakon asocijacije za množenje, ako je $a = 2$

$b = -3 \quad c = 4$

3. Pokaži da je $a(b+c) = ab + ac$,

ako je $a = -2, \quad b = x, \quad c = -3$

4. Oslobodi se zagrada, a zatim izračunaj

a) $10 - \{10 - [10 - (10-3)]\} =$

b) $-3a[4b - 2(3b-2a) + 2(5-b)] =$

c) $3x^2 - 5 \cdot \{3x - x \cdot [2x - (4x-2) - 2 \cdot (7-3x)]\} =$

5. Naznači pomoću zagrada, a onda izračunaj da od produkta brojeva 2 i -5 treba oduzeti razliku izraza $(5-10)$ i $(5+10)$.

-- -- . -- --

ODGOVORI NA IV ISPIT ZNANJA

1. a) komutacije za množenje

   b) asocijacije za zbrajanje

   c) distribucije

   d) distribucije

2. $(a.b) . c = a . (b.c)$

   $[2 . (-3)] . 4 = 2 [(-3) . 4]$

   $[-6] . 4 = 2 . [-12]$

   $-24 = -24$

3. $-2 [x + (-3)] = (-2) . x + (-2) . (-3)$

   $-2 [x - 3] = -2x + 6$

   $-2x + 6 = -2x + 6$

4. a) 3

   b) $-12a^2 + 12ab - 30a$

   c) $23x^2 - 75x$

5. $2 . (-5) - [(5-10) - (5 + 10)] =$

   $= -10 - [5 - 10 - 5 - 10] =$

   $= -10 - 5 + 10 + 5 + 10 = 10$

- - o - -

Paragraf 5

NEKI POJMOVI VEZANI UZ PRIRODNE BROJEVE

U ovom paragrafu ćemo govoriti o nekim važnim pojmovima koji su vezani uz prirodne brojeve, a trebaju nam zbog operacija razlomcima o kojima će biti govora u slijedećem paragrafu. To su ovi pojmovi: prosti brojevi, rastavljanje prirodnih brojeva u produkt prostih brojeva, najveća zajednička mjera i najmanji zajednički višekratnik dvaju prirodnih brojeva.

1 ---

Brojevi 1, 2, 3, 4, 5,...
se nazivaju __________ brojevi.

1 ---

prirodni
(ili cijeli pozitivni brojevi)

2 ---

Neka su a, b, c prirodni brojevi.
Definicija 1. a je FAKTOR od c ako postoji prirodni broj b takav da je
$a \cdot b = c$

Dakle 8 je __________ od 24 jer je
$8 \cdot 3 = 24$

2

FAKTOR

3

7 . 9 = 63

4

1 . a = a

5

a . 1 = a

3

7 je faktor od 63, jer je

____

4

5 je faktor od 5, jer je 5 . 1 = 5

Zašto je 1 faktor od bilo kojeg prirodnog broja a ?

Jer je ____________

5

Zašto je a faktor od a ?
(a je prirodan broj)

Jer je ______________

6

Na osnovu posljednja dva članka svaki prirodni broj ima najmanje

________________ faktora

6

2

7

Ima prirodnih brojeva koji imaju više od dva faktora.
Npr. svi faktori od 18

su: 1, 2, 3, 6, 9, 18

Ispiši sve faktore od 24

____

7

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24

8

Ispiši sve faktore od 17

____

8

1, 17

9

Umjesto da kažemo: "a je faktor od c", mogli smo reći "a dijeli c" ili "c je višekratnik od a" ili "a je divizor od c".

Dakle četiri navedena pojma u ovom članku

____

(imaju ili nemaju) isto značenje.

9 ______

imaju

1o ______

1, 2, 4, 7, 14, 28

11 ______

PROSTI

12 ______

2, 13

1o ______

Nađi sve prirodne brojeve s kojima je dijeljiv broj 28

______

11 ______

Definicija 2.
Prirodni brojevi koji su dijeljivi samo sa 1 i samim sobom zovu se PROSTI brojevi.

1 se ne smatra prostim brojem

N.pr. 2, 3, 5, 7, 11, ...

su ______ brojevi.

12 ______

26 nije prost broj, jer je osim sa 1 i 26 djeljiv još sa ______ i ______

13 ______

Definicija 3. Prirodni brojevi koji su, osim sa 1 i samim sobom, dijeljiv[i] i drugim prirodnim brojevima, zovu se SLOŽENI brojevi.

Svi prirodni brojevi se, dakle, sastoje od PROSTIH, ____________ i ____

13 SLOŽENIH i 1

(1 nije prost niti složen broj)

14 Ako želimo utvrditi je li neki prirodni broj složen, onda ga započnemo dijeliti sa 2, zatim sa 3, zatim sa 5 iitd. sa sve većim i većim prostim brojem.

Npr. Je li 47 složen broj?
Budući da nije dijeljiv ni sa 2, 3, 5, 7, zaključujemo da je prost (prostim brojem, koji je veći od 7, ne može biti dijeljiv jer je već $7.7 > 47$)

Kakav je broj 77 ? ____________

14 Složen

(7 . 11 = 77)

15 Iz dosada rečenog proizlazi da se svaki složeni broj može napisati kao produkt od dvaju ili više prostih brojeva.

Napiši kao produkt prostih brojeva broj 3o = ________________

15 ________________

2 . 3 . 5

16 ________________

420 = 2.210 =

= 2.2.105 =

= 2.2.3.35 =

= 2.2.3.5.7

16 ________________

Ovaj postupak se naziva rastavljanje na proste faktore ili FAKTORIZACIJA.

Tehnika faktorizacije je slijedeća:

666 = 2 . 333 = 2 . 3 . 111 = 2.3.3.37

Faktoriziraj 420, služeći se pokazanom tehnikom ________________

17 ________________

Neka su a, b, c prirodni brojevi.
Definicija 4. c je zajednička mjera od a i b ako su a i b dijeljivi sa c.

c je NAJVEĆA ZAJEDNIČKA MJERA od a i b ako je c najveći broj kojim su dijeljivi a i b.
(najveću zajedničku mjeru kraće označavamo sa "M")

1, 2, 3 i 6 su zajedničke mjere od 12 i 18.

6 je ________, ________,
________ od 12 i 18

17 ———

najveća zajednička mjera
(kraće: M)

18 ———

Tehniku određivanja "M"-a naučit ćemo na ovom primjeru

8o,	14o	2
4o,	7o	2
2o,	35	5
4	7	

M = 2 . 2 . 5

Odredi M (24, 36) = ___________

(ovo simbolički znači: najveća zajednička mjera od 24 i 36)

18 ———

M(24, 36) = 12
(2 . 2 . 3 = 12)

19 ———

M(33, 7o) = ___________

19 ———

M(33, 7o) = 1

2o ———

Definicija 5. Prirodni brojevi a, b čija je najveća zajednička mjera 1, zovu se RELATIVNO PROSTI brojevi.

Brojevi 6 i 35 su:

___________, ___________

20

RELATIVNO PROSTI

$$\begin{pmatrix} 6 = 1.2.3.6 \\ 35 = 1.5.7.35 \end{pmatrix}$$

21

a) jesu

154 = 2.7.11

195 = 3.5.13

M(154, 195) = 1

b) nisu

148 = 2.2.37

333 = 3.3.37

M(148, 333) = 37

21

Jesu li slijedeći parovi prirodnih brojeva relativno prosti ?

a) 154 i 195 ________

b) 148 i 333 ________

(jesu ili nisu)

22

Neka su a, b, c prirodni brojevi

Definicija: c je zajednički višekratnik od a i b, ako je c djeljiv sa a i sa b.

c je NAJMANJI ZAJEDNIČKI VIŠEKRATNIK od a i c ako je c najmanji broj koji je djeljiv sa a i sa b.

(najmanji zajednički višekratnik kraće označavamo "v")

Npr. 6, 12, 18,... su zajednički višekratnici od 3 i 2 dok je

6 ________, ________, ________

od 3 i 2.

22

najmanji
zajednički
višekratnik

23

beskonačno
1

24

42o

23

Bilo koja dva prirodna broja a i b imaju ______ (konačno ili beskonačno) zajedničkih višekratnika, dok najmanji zajednički višekratnik imaju samo ______

24

Tehniku određivanja "v"-a naučit ćemo na ovom primjeru.

3o, 45	3
1o, 15	5
2, 3	2
1, 3	3
1	

v(3o, 45) = 3.5.2.3 = 9o

Odredi v(42, 6o) = ______

25

v(6, 3o, 42) = ______

25

$v(6, 30, 42) = 210$

6, 3o, 42	2
3, 15, 21	3
1, 5, 7	5
1, 7	7
1	

26

Na kraju spomenimo da između dva prirodna broja a, b i njihovih M i v postoji ova relacija

$$M(a,b) \cdot v(a,b) = a \cdot b$$

Provjeri ovu jednakost na primjeru gdje je a = 12 b = 18

26

12, 18	2
6, 9	3
2, 3	2
1 3	3
1	

$M(12, 18) = 2.3 = 6$

$v(12, 18) = 2.3.2.3=36$

$6.36 \stackrel{?}{=} 12.18$

$216 = 216$

27

Napomena: Kasnije ćemo susresti rastavljanja na faktore, npr. ovakovog oblika:

$$5 = \frac{5}{2} \cdot 2$$

I ovdje ćemo brojeve $\frac{5}{2}$ i 2 nazivati faktorima, međutim ne u smislu definicija iz ovog paragrafa (jer $\frac{5}{2}$ nije prirodan broj).

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 5.

I - Definicije

Neka su a, b, c prirodni brojevi

Definicija 1.

a je faktor od c ako postoji prirodni broj b takav da je a . b = c

Definicija 2.

Prirodni brojevi koji su djeljivi samo sa 1 i samim sobom zovu se PROSTI brojevi.

1 nije prost broj.

Definicija 3.

Prirodni brojevi koji su, osim sa 1 i samim sobom, djeljivi i drugim prirodnim brojevima zovu se SLOŽENI brojevi.

Definicija 4.

c je najveća zajednička mjera od a i b ako je c najveći broj kojim su djeljivi a i b.

Definicija 5.

Prirodni brojevi a, b, čija je najveća zajednička mjera 1, zovu se RELATIVNO PROSTI brojevi.

II - Rezime

a) Prirodni broj je prost ili složen

b) Broj 1 nije niti prost, niti složen

c) Svaki se složeni broj može napisati u obliku produkta prostih brojeva na jedan jedinstveni način (osnovni poučak u aritmetici)

III - Važan poučak

$$M(a, b) \cdot v(a, b) = a \cdot b$$

- - o - -

V ISPIT ZNANJA

1. Koja izjava nije istinita ?

   a) 1o5 je djeljiv sa 3

   b) 372 je djeljiv sa 6

   c) broj je djeljiv sa 6 ako je djeljiv sa 2 i sa 3.

   d) 128 je djeljiv sa 7

2. Faktoriziraj

   a) 84

   b) 197

3. Koja su tri slijedeća prosta broja iza 29 ?

4. Odredi "M" i "v" od slijedećih parova brojeva

   a) 27, 45

   b) 34, 15

5. v(3, 8, 12, 15) = ?

6. Koja izjava nije istinita ?

   a) Suma dvaju prostih brojeva ne može biti prost broj.

   b) Produkt dvaju prostih brojeva je uvijek složen broj.

   c) ako su a i b prosti, onda je $v(a.b) < a.b$

   d) ako su a i b prosti, onda je $M(a,b) = 1$

- - . - -

ODGOVORI NA V ISPIT ZNANJA

1. d (128 : 7 = 18)

   57

   2 - ostatak

2. a) 84 = 2.2.3.7

   b) 197 = je prost

3. 31, 37, 41

4. a) M = 9　　v = 135

   b) M = 1　　v = 51o

5. v(3,8,12,15) = 12o

6. Izjave pod a i b nisu istinite.

   Ako su a i b prosti, onda je v(a,b) = a.b

- - o - -

Paragraf 6

RAZLOMCI

Do sada smo naučili zbrajati, oduzimati i množiti cijele brojeve. U ovome paragrafu ćemo naučiti i dijeljenje cijelih brojeva. To će nas dovesti do pojma razlomka kojemu su brojnik i nazivnik cijeli brojevi.

Za operacije razlomcima iskoristit ćemo mnoga naučena pravila, ali će nam biti potrebna još i neka nova pravila.

1 ______________________________

Dijeljenje cijelih brojeva se definira ovako:

$a : b = c$ ako je $a = b . c$

Dakle $12:3 = 4$ jer je __________

2 ______________________________

$5:0 =$ __________

3 ______________________________

Definicija dijeljenja cijelih brojeva iz članka 1. je dobra uz uvjet

1 ______________________________

$3.4 = 12$

2 ______________________________

Nema niti jednog broja koji pomnožen nulom daje 5.

Općenito kažemo da dijeljenje nulom nije definirano.

3 ______

$b \neq 0$

4 ______

$a \cdot 0 = 0$

5 ______

nula

da je b ______

4 ______

$0 : a = 0, \quad a \neq 0$

jer je ______

5 ______

Dok dijeljenje nulom nije definirano, nula podijeljena bilo kojim brojem (osim nule) je uvijek

______

6 ______

Što se tiče pravila za predznake prilikom dijeljenja cijelih brojeva ona su ista kao i kod množenja.

Dakle:

$(+a) : (+b) =$ ______

$(+a) : (-b) =$ ______

$(-a) : (+b) =$ ______

$(-a) : (-b) =$ ______

6

$(+a):(+b) = +(a:b)$

$(+a):(-b) = -(a:b)$

$(-a):(+b) = -(a:b)$

$(-a):(-b) = +(a:b)$

7

a) -5

b) 3

c) 0

d) $\frac{9}{2} = 4\frac{1}{2}$

7

Izračunaj:

a) $15 : (-3) =$

b) $(-21) : (-7) =$

c) $0 : (-4) =$

d) $9 : 2 =$

8

Posljednji zadatak iz prošlog članka nam pokazuje da dijeljenjem cijelih brojeva nema uvijek rezultata među cijelim brojevima. Zato uvodimo pojam razlomka (ili razlomljenog broja)

Definicija 1. Neka su a i b cijeli brojevi i neka je $b \neq 0$.
$\frac{a}{b}$ (ima značenje $a:b$) nazivamo razlomak ili RACIONALNI BROJ; a se naziva brojnik, a b nazivnik razlomka.

Koji od slijedećih brojeva nisu racionalni brojevi ?

a) $\frac{4}{5}$ c) $\frac{-6}{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{17}{4}$ d) $\frac{-5}{-8}$ f) $\frac{11}{0}$

8 ---

e) jer brojnik nije cijeli broj

f) jer je nazivnik 0

9 ---

Svi su međusobno jednaki tj.

$-\frac{3}{4} = \frac{-9}{12} = \frac{18}{-24} = -\frac{-6}{-8} = \ldots$

lo ---

beskonačno

9 ---

Definicija 2. Jednakost dvaju razlomaka definiramo ovako:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ako je $a.d = b.c$

Dakle $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$, jer je $2.6 = 4.3$

Koji su od slijedećih razlomaka međusobno jednaki ?

a) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{18}{-24}$

b) $\frac{-9}{12}$ d) $-\frac{-6}{-8}$

lo ---

Uvijek ima čitav niz od

____________ (konačno ili beskonačno) razlomaka koji su svi međusobno jednaki.

11 ---

Iz definicije 2. slijedi jednakost

$\frac{a}{b} = \frac{a.c}{b.c}$ $c \neq 0$

koja nam govori ništa drugo nego da se vrijednost razlomka ne mijenja ako mu brojnik i nazivnik pomnožimo

istim brojem.

Da li se vrijednost razlomka mijenja ako mu brojnik i nazivnik podijelimo istim brojem ________ (da ili ne)

11 ————————

ne

12 ————————

Ako brojnik i nazivnik nisu relativno prosti brojevi, onda mu brojnik i nazivnik dijelimo sa M-om (najvećom zajedničkom mjerom) od brojnika i nazivnika. Kažemo da smo ga skratili.

Skrati slijedeće razlomke:

a) $\frac{34}{51} =$ c) $\frac{124}{-72} =$

b) $-\frac{1o5}{315}$ d) $\frac{ac}{bc}$

12 ————————

a) $\frac{2}{3}$

b) $-\frac{1}{3}$

c) $-\frac{31}{18}$

d) $\frac{a}{b}$ $(c \neq 0)$

13 ————————

Budući da razlomak nije drugo nego napisana dioba cijelih brojeva na drugi način, onda pravila o predznacima prilikom dijeljenja cijelih brojeva vrijede i ovdje. Što kratko možemo izreći ovako:

Razlomak je pozitivan ako su brojnik i nazivnik istog predznaka, dok je negativan ako su brojnik i nazivnik ________ predznaka.

13

suprotnog

14

$-\frac{5}{6} = \frac{-5}{6} = \frac{5}{-6}$

14

Općenito pišemo:

$$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$$

Ovo nam daje mogućnost da možemo vr-
šiti transformacije u vezi sa prod-
znakom

Dakle $-\frac{5}{6} = \frac{?}{6} = \frac{5}{?}$

15

Sada prelazimo na četiri osnovne
računske operacije razlomcima.

Zbrajanje dvaju razlomaka defini-
ramo ovako:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b.d}$$

Dakle $\frac{2}{3} + \frac{3}{5} = \frac{2.5 + 3.3}{3.5} = \frac{19}{15}$

Izračunaj:

$\frac{2}{5} + \frac{6}{7} =$ ____________

15 ---

$\frac{44}{35}$

16 ---

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a + c}{b}}$$

17 ---

zbroje

16 ---

U praksi razlomke obično zbrajamo na nešto drugačiji način (on je u skladu s našom definicijom zbrajanja dvaju razlomaka) i to tako da ih svodimo na najmanji zajednički nazivnik (najmanji zajednički višekratnik od nazivnika) i zbrojimo brojnike.

Na primjer

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{6} = \frac{3.3}{12} + \frac{2.5}{12} = \frac{9 + 1o}{12} = \frac{19}{12}$$

Općenito: $\frac{a}{b} + \frac{c}{b} =$ ____________________

17 ---

Razlomci, koji imaju nazivnike jednake, se zbrajaju tako da se zajednički nazivnik propiše a brojnici

____

18 ---

Ubuduće ćemo zbrajanje razlomaka izvoditi svođenjem na najmanji zajednički nazivnik.

$$\frac{-11}{18} + \frac{7}{27} = \text{________________}$$

18

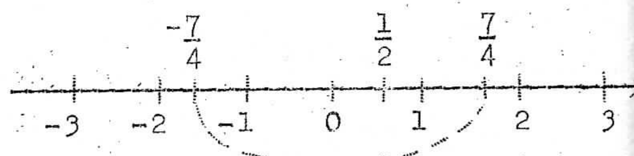
$$\frac{-11}{18} + \frac{7}{27} =$$

$$= \frac{3.(-11) + 2.7}{54} =$$

$$= \frac{-33 + 14}{54} = \frac{-19}{54} =$$

$$= -\frac{19}{54}$$

19



Slika nam pokazuje da i racionalne brojeve možemo pridružiti točkama na pravcu. Kod cijelih brojeva smo uveli pojam suprotnog broja koji se prenosi i na racionalne brojeve.

Broju $-\frac{7}{4}$ je suprotan __________

a broju $\frac{a}{b}$ je suprotan __________.

19

$$\frac{7}{4}$$

$$-\frac{a}{b} \left(= \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}\right)$$

20

Oduzimanje razlomaka svodimo na zbrajanje suprotnog broja (prisjetimo se da smo tako definirali i oduzimanje cijelih brojeva)

Dakle općenito:

$$\boxed{\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \left(-\frac{c}{d}\right) = \frac{a}{b} + \frac{-c}{d}}$$

Odnosno:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{?}{b\,.\,d}$$

20

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{b.d}$$

21

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = \frac{5.4 - 3.3}{24} =$$

$$= \frac{20 - 9}{24} = \frac{11}{24}$$

22

$$\frac{b - a}{ab}$$

23

$$= \frac{x.x + 2.y}{2.x} =$$

$$= \frac{x^2 + 2y}{2x}$$

21

$$\frac{5}{6} - \frac{3}{8} = __________$$

22

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = __________$$

23

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{x} = __________$$

24

U zadatku se može odjednom pojaviti više zbrajanja ili oduzimanja. U tom slučaju se služimo zakonima komutacije i asocijacije.

Npr.

$$\frac{3}{4} + \frac{5}{3} - \frac{5}{12} = (\frac{3}{4} + \frac{5}{3}) + \frac{-5}{12} =$$

$$= \frac{9+20}{12} + \frac{-5}{12} = \frac{29}{12} + \frac{-5}{12} = \frac{29-5}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

Upraksi radimo ovako:

$$= \frac{9+20-5}{12} = \frac{29-5}{12} = \frac{24}{12} = 2$$

Izračunaj: $\frac{3}{5} - \frac{7}{11} + \frac{2}{3} =$

24

$$= \frac{3.11.3-7.5.3+2.5.11}{5.11.3} =$$

$$= \frac{99 - 1o5 + 11o}{165} =$$

$$= \frac{2o9 - 1o5}{165} = \frac{1o4}{165}$$

25

brojnikom

nazivnikom

26

$$= \frac{-84}{-168} = \frac{1}{2}$$

25

Množenje razlomaka definiramo ovako:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

Dakle, razlomak se množi razlomkom tako da se brojnik pomnoži________ a nazivnik pomnoži __________.

26

Pomnoži i rezultat skrati:

$$\frac{-4}{7} \cdot \frac{21}{-24} =$$

27

Gornji zadatak smo jednostavnij[e] mogli riješiti ovako:

$$\frac{\overset{1}{\cancel{-4}}}{\cancel{7}} \cdot \frac{\overset{3}{\cancel{21}}}{\underset{6}{\cancel{-24}}} = \frac{-3}{-6} = \frac{1}{2}$$

Dakle, prije množenja smo skratili brojnik prvog razlomka sa ________ drugog razlomka i ________ drugog razlomka nazivnikom prvog razlomka.

27

2

27

nazivnikom

brojnik

28

$$\frac{\overset{3}{\cancel{9}}}{5} \cdot \frac{-3}{\underset{4}{\cancel{12}}} = \frac{-9}{20} = -\frac{9}{20}$$

28

Izračunaj tako da prije množenja skratiš što se može

$\frac{9}{5} \cdot \frac{-3}{12} =$ ________________

29

Sada ćemo pokazati da i cijeli brojevi spadaju u razlomke. Razlomak smo definirali kao $\frac{a}{b}$ gdje b ne smije biti nula.
Dakle b smije biti i 1 pa možemo postaviti pitanje što predstavlja $\frac{a}{1}$?

Budući je a ovdje po definiciji cijeli broj, onda je i $\frac{a}{1}$ također cijeli broj.

Dakle:

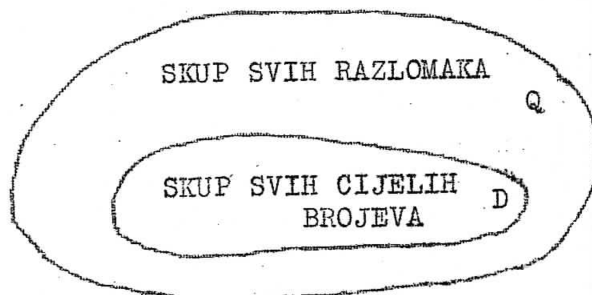
$$\ldots, \frac{-3}{1}, \frac{-2}{1}, \frac{-1}{1}, \frac{0}{1}, \frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \ldots$$

su specijalni razlomci koje još nazivamo ______________ brojevi.

29 ―――――

cijeli

30 ―――――



Označimo sa Q skup svih razlomaka, a sa D skup svih cijelih brojeva.

Slika pokazuje da je skup D pod-skup od skupa ________.

30 ―――――

Q

31 ―――――

Činjenicu iz prošlog članka možemo simbolički pisati ovako:

$D \subset Q$

"$\subset$" se čita: jo dio (ili podskup)

Dakle skup D ________ od skupa Q.

31 ―――――

je dio

32 ―――――

Označimo još sve prirodne brojeve kra-ćo sa N. To jest

$N = \{1, 2, 3, \ldots 10, 11, 12, \ldots\}$

Koja od navedenih relacija nije istinita ?

(N, D, Q su spomenuti skupovi brojeva)

a) $N \subset D$ c) $N \subset Q$

b) $D \subset N$ d) $D \subset D$

32

33

b

A sada u skupu Q (svi razlomci ili racionalni brojevi) definiramo RECIPROČNI broj.

Definicija 3. Svaki racionalni broj $\frac{a}{b}$ (osim nule) ima svoj recipročni broj koji glasi $\frac{b}{a}$.

Npr.

od $\frac{2}{3}$ recipročno je $\frac{3}{2}$

Odredi recipročne vrijednosti od:

a) -3 b) a c) $\frac{b}{c}$ d) 0

33

a) $-\frac{1}{3}$

b) $\frac{1}{a}$

c) $\frac{c}{b}$

d) nema recipročne vrijednosti

34

Produkt bilo kojeg racionalnog broja i njegove recipročne vrijednosti je uvijek jednako ______

34

1

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

35

Dijeljenje razlomaka svodimo na množenje recipročnom vrijednosti. Simbolički

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c}$$

Dakle, razlomak se dijeli razlomkom tako da se divident ______________ sa ______________ vrijednosti divizora.

35

pomnoži

recipročnom

36

Npr.

$$\frac{5}{6} : \frac{7}{11} = \frac{5}{6} \cdot \frac{11}{7} = \frac{55}{42}$$

Izračunaj:

$$- \frac{2}{3} : 5 =$$

36

$$- \frac{2}{3} : 5 = - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} =$$

$$= - \frac{2}{15}$$

37

Izračunaj:

$$\frac{a}{2} : \frac{b}{4} =$$

37

$$\frac{a}{2} : \frac{b}{4} = \frac{a}{\not{2}_1} \cdot \frac{\not{4}^2}{b} = \frac{2a}{b}$$

38

$$x : \frac{1}{x} = \frac{x}{1} \cdot \frac{x}{1} = \frac{x^2}{1} = x^2$$

39

$$= \frac{2}{3} : \frac{5}{7} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{15}$$

38

$$x : \frac{1}{x}$$

39

Razlomke oblika $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ nazivamo dvojni razlomci.

Dvojni razlomak možemo napisati u obliku dijeljenja, tj.

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$$

Dakle $\dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}}$ = ____________

4o

1) $\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ = ____________

2) $\dfrac{a}{\frac{b}{c}}$ = ____________

40 ——— 41

1) $= \frac{a}{b} : \frac{c}{1} = \frac{a}{b \cdot c}$

2) $= \frac{a}{1} : \frac{b}{c} = \frac{a \cdot c}{b}$

Ako u zadatku dolaze sve četiri računske operacije, onda najprije mn žimo i dijelimo, a tek onda zbrajamo i oduzimamo. Služeći se ovim pravilo izračunaj:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} : \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$$

41 ——— 42

$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{1} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3 + 4 - 2}{6} =$

$= \frac{7 - 2}{6} = \frac{5}{6}$

Svaki drugi redoslijed kojim tre da se operacije izvode naznačuje se zagradama. (drugim riječima najprije izračunati u zagradi, a onda primjeni ti pravilo iz prošlog članka)

Izračunaj:

a) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : \frac{1}{2} - \frac{1}{3} =$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} : (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) =$

c) $(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}) : (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) =$

42 ——— 43

a) $\frac{3+2}{\cancel{6}_{3}} \cdot \frac{\cancel{2}}{1} - \frac{1}{3} =$

$= \frac{5}{3} - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$

Ako operacije zbrajanja i oduzim manja nazovemo operacije prvog stupn a operacije množenje i dijeljenje op racije drugog stupnja, onda se najpr

b) $\frac{5}{2}$

c) 5

43

drugog

prvog

44

a) $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$

b) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{5}{2} = \frac{20}{3}$

c) $= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{12}$

izvode operacije ________ stupnja,

a zatim operacije ________ stupnja.

44

Ako u zadatku dolaze samo operacije istog stupnja, onda se one izvode istim redoslijedom kojim su naznačene.

Izračunaj:

a) $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} =$

b) $\frac{2}{3} : \frac{1}{4} : \frac{2}{5} =$

c) $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} : \frac{2}{5} =$

45

Svaki drugi redoslijed kojim treba da se operacije izvode naznačuje se zagradama.

Izračunaj:

a) $\frac{3}{4} : (\frac{1}{2} : \frac{2}{5}) =$

b) $\frac{1}{2} : \left[\frac{1}{2} : (\frac{1}{2} : \frac{1}{3})\right] =$

c) $1 : \left\{\frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} : (\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5})\right]\right\} =$

45

a) $\frac{3}{5}$

b) $\frac{3}{2}$

c) $\frac{3}{10}$

46

NEPRAVI

PRAVI

46

Razlomak kojemu je brojnik manji od nazivnika se naziva PRAVI razlomak, dok se razlomak kojemu je brojnik veći od nazivnika naziva NEPRAVI razlomak.

Npr. $\frac{7}{4}$ je ______________ razlomak,

a $\frac{3}{8}$ je ______________ razlomak.

47

Broj koji je kombinacija cijelog broja i pravog razlomka se naziva MJEŠOVITI broj.

Npr. $5\frac{2}{3}$ je mješoviti broj (razlikuj

$5\frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = \frac{17}{3}$ od $5 \cdot \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$)

Svaki nepravi razlomak se može pretvoriti u mješoviti broj.

Npr. $\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$

Tehnika pretvaranja je:

$23 : 5 = 4 + \frac{3}{5} = 4\frac{3}{5}$

3 - ostatak

a) $\frac{38}{9}$ kao mješoviti broj ______

b) $9\frac{2}{5}$ kao nepravi razlomak ______

47

47

a) $4\frac{2}{9}$

b) $\frac{47}{5}$

48

a) $\frac{11}{5} = 2\frac{1}{5}$

b) 35

c) 1

48

Kako se operira mješovitim brojevima, neka nam pokaže ovaj primjer:

$2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4}) =$

$= 2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} \cdot (\frac{1}{6} - \frac{1}{12}) =$

$= 2\frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} \cdot \frac{2-1}{12} =$

$= 2\frac{2}{3} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{12} =$

$= 2\frac{2}{3} + \frac{5}{24} = 2\,\frac{16+5}{24} =$

$= 2\,\frac{21}{24} = \underline{2\,\frac{7}{8}}$

Izračunaj:

a) $(1\frac{2}{5} + 1\frac{1}{6}) : 1\frac{2}{5} =$

b) $(1o \cdot 1\frac{2}{5} + 12 \cdot 1\frac{1}{6}) : 1\frac{2}{5} =$

c) $2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} : 4 - \frac{29}{3o} =$

49

Izračunaj:

$\left[41\frac{29}{72} - (18\frac{7}{8} - 5\frac{1}{4}) \cdot (1o\frac{1}{2} - 7\frac{2}{3})\right] : 22\frac{7}{18} =$

49

$\frac{1}{8}$

50

$A = 3\frac{41}{56}$

$B = \frac{3}{125}$

$R = (3\frac{41}{56} : 6\frac{11}{14} -$

$- \frac{13}{25}) : \frac{3}{125}$

$\underline{R = 1\frac{1}{4}}$

50

Neka je:

$A = (12\frac{9}{14} - 10\frac{3}{7}) \cdot 1\frac{2}{31} + 1\frac{3}{8}$

$B = 6\frac{3}{5} - 6\frac{72}{125}$

Odredi:

$R = (A : 6\frac{11}{14} - \frac{13}{25}) : B$

51

Neka je:

$A = \frac{1}{2} : \left\{ \frac{2}{3} : \left[\frac{4}{5} \cdot (\frac{2}{7} \cdot 3\frac{1}{2}) \right] \right\}$

$B = 2\frac{1}{2} : 1\frac{1}{4} \cdot 4$

$C = \frac{2}{5} - \left\{ \frac{3}{4} - \left[\frac{2}{3} - (\frac{2}{5} - \frac{3}{10}) - \right.\right.$

$\left.\left. - (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) \right] \right\}$

odredi:

$R = \frac{A}{B} - C$

51

$A = \frac{3}{5}$

$B = 8$

$C = \frac{1}{2}$

$R = \frac{\frac{3}{5}}{8} - \frac{1}{2}$

$R = - \frac{17}{40}$

52

9

52

Izračunaj:

$$\frac{\frac{3}{8} : \left(\frac{1}{4} + 2\frac{1}{2} \cdot 3 - 3\frac{1}{2}\right)}{\left(3\frac{1}{2} - 2\frac{3}{51}\right) \cdot \frac{1}{147}} =$$

53

Oslobađanje zagrada utvrdimo na ovom primjeru

$$\frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(4\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3}\right)\right\}\right]\right\} =$$

(Primjetimo da se zagrade ovdje pojavljuju u četiri navrata. Prisjetimo se osnovnog pravila da se zagrada oslobađamo iznutra prema vani).

Dakle:

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left[\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{6}^{\,3}\right\}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3 + 12}{4}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{5}{8} + \frac{15}{8}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{3}{4} + \frac{1}{\cancel{2}_{1}} \cdot \frac{\cancel{20}^{10}}{8}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{6 + 10}{8} = \frac{16}{16} = 1$$

ZADAĆA:

U izrazu $10 - 2\,(4 - a)$

a) zamijeni: $a = 1 - x$

b) zatim zamijeni: $x = (3 + 5) : 2$

c) izračunaj brojevnu vrijednost tako dobivenog izraza

53

a) $10 - 2(4 - [1 - x])$

b) $10 - 2(4 - [1 - \{3 + 5\} : 2])$

ili ovako:

$10 - 2 \cdot (4 - [1 - \frac{3 + 5}{2}])$

Ovdje je ulogu zagrade preuzela razlomkova crta.

c) -4

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 6.

I - Definicije:

Definicija 1. $a : b = c$, $b \neq 0$, ako je $a = b \cdot c$

Definicija 2. Neka su a i b cijeli brojevi i $b \neq 0$.

$\frac{a}{b}$ nazivamo razlomak ili racionalni broj

Definicija 3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, ako je $a \cdot d = b \cdot c$

Definicija 4. $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

II - Operacije razlomcima:

a) Zbrajanje $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d + b \cdot c}{b \cdot d}$

b) Oduzimanje $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d - b \cdot c}{b \cdot d}$

Ako razlomci imaju jednake nazivnike, onda se zbrajaju i oduzimaju po zakonu:

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$$

c) Množenje $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

d) Dijeljenje $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$

- - . - -

VI ISPIT ZNANJA

1. Koja izjava nije istinita?

a) $\frac{a}{b} = \frac{a.k}{b.k}$ c) $7\frac{2}{5} = 7 + \frac{2}{5}$

b) $\frac{a}{b} = \frac{\frac{a}{k}}{\frac{b}{k}}$ d) $\frac{7}{8} < \frac{13}{15}$

2. Izračunaj i rezultate skrati:

a) $\frac{1}{2} + \frac{-7}{8} =$ c) $\frac{2}{9} : \frac{1}{3} =$ e) $-4 : \frac{3}{4} =$

b) $\frac{3}{5} - \frac{-17}{4} =$ d) $\frac{8}{5} : (-4) =$ f) $2\frac{2}{3} : 1\frac{3}{4}$

3. Provjeri da je:

a) $(ab)c = a(bc)$ ako je $a = 2$, $b = \frac{1}{3}$, $c = -\frac{6}{5}$

b) $a(b+c) = ab + ac$ ako je $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{3}$

4. Koja izjava nije istinita ?

a) $a - b = -(b-a)$

b) Recipročna vrijednost od x je $\frac{1}{x}$; $x \neq 0$

c) $\frac{a}{b+c} = a : b + c$

d) $(\frac{a}{b} - \frac{c}{d} > 0) \Rightarrow \frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

5. Izračunaj:

a) $\frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}$ b) $\frac{1}{2x} - \frac{3}{x^2} =$

c) $(41\frac{23}{84} - 40\frac{49}{60}) \cdot \left\{\left[4 - 3\frac{1}{2} \cdot (2\frac{1}{7} - 1\frac{1}{5})\right] : \frac{4}{25}\right\} =$

ODGOVORI NA VI ISPIT ZNANJA

1. d) Da bismo utvrdili koji je od dva razlomka veći, moramo razlomke svesti na zajednički nazivnik.

$(\frac{7}{8} = \frac{1o5}{12o}, \quad \frac{13}{15} = \frac{1o4}{12o}) \Rightarrow \frac{7}{8} > \frac{13}{15}$

2. a) $-\frac{3}{8}$ c) $\frac{2}{3}$ e) $-\frac{16}{3} = -5\frac{1}{3}$

b) $\frac{97}{2o} = 4\frac{17}{2o}$ d) $-\frac{2}{5}$ f) $1\frac{11}{21}$

3. a) $(2 \cdot \frac{1}{3}) \cdot (-\frac{6}{5}) = 2\left[\frac{1}{3} \cdot (-\frac{6}{5})\right] \Rightarrow \frac{-12}{15} = -\frac{12}{15}$

b) $\frac{1}{2}(-\frac{2}{3} + \frac{1}{3}) = \frac{1}{2} \cdot (-\frac{2}{3}) + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \Rightarrow -\frac{1}{6} = -\frac{1}{6}$

4. c) Ispravno je ovako:

$$\frac{a}{b+c} = a : (b+c)$$

5. a) $\frac{1}{7}$

b) $\frac{x-6}{2x^2}$

c) 2

- - . - -

Paragraf 7

DECIMALNI BROJEVI

1 Brojevi 1, lo, loo, loooo, ... zovu se dekadske jedinice.

Razlomak čiji je nazivnik jedna od dekadskih jedinica, naziva se decimalan razlomak (decimalan broj).

Brojevi:

$\frac{2}{1}$, $\frac{5}{lo}$, $\frac{-7}{loo}$, $\frac{9}{loo}$

su ______________________ razlomci

1 ______________________

decimalni

2 ______________________

Decimalni razlomak $\frac{256}{loo}$ možemo napisati ovako:

$$\frac{256}{loo} = \frac{2oo}{loo} + \frac{5o}{loo} + \frac{6}{loo} = 2 + \frac{5}{lo} + \frac{6}{loo}$$

Kraće se ovaj razlomak piše:

2,56

Kažemo da je razlomak $\frac{256}{loo}$ napisan u decimalnom sistemu.

Napiši u decimalnom sistemu razlomak $\frac{3333}{looo}$.

2

3,333

3

$$\frac{3333}{1000} = \frac{3000}{1000} + \frac{300}{1000} + \frac{30}{1000} + \frac{3}{1000} =$$

$$= 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \frac{3}{1000} = 3,333$$

Znak 3 u broju 3,333 pojavljuje se 4 puta ali svaki puta s drugim značenjem; idući od desna nalijevo, vrijednost se množi svaki puta sa 10. Značenje znaka 3 zavisi od pozicije; to je pozicioni način prikazivanja broja.

Napiši u decimalnom sistemu decimalni razlomak (broj) $\frac{23}{1000}$

Brojevi $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000}, \frac{1}{10000}, \ldots$

zovu se decimalne jedinice.

Napišite decimalne jedinice u decimalnom sistemu.

3

0,1 , 0,001, 0,0001,
0,00001,...

4

0,1 je decimalna jedinica prvog reda (ili 1 desetina).

0,01 je decimalna jedinica drugog reda (ili 1 stotnina)

0,ool je decimalna jedinica trećeg reda (ili 1 tisućinka)

0,oool je ______________ jedinica reda ______________ (ili 1 ______________).

4

decimalna

četvrtog

desettisućinka

5

Decimalni broj

35,385

se čita: 35 i 385 tisućinki

ili 35, zarez 385

Kako se čita broj 4,35, a kako broj 0,3.

5

4 i 35 stotnina
ili 4, zarez 35.

0 i 3 desetina
ili 0, zarez 3.

6

Znamenke na desno od decimalnog zareza zovu se decimale. Dva decimalna broja mogu se uvijek napisati tako da imaju jednaki broj decimala; ako jedan broj ima manje decimala nego drugi, onda mu nadopišemo nule.

Uzmimo brojeve 3,53 i 0,435

Drugi broj ima 3 decimale a prvi dvije. Želimo li da i prvi broj ima 3 decimale, onda mu s desne strane nadopišemo nulu. Dobivamo: 3,53o.

Napišite brojeve 0,5; 0,32; 3,8; 63,584 tako da imaju 4 decimale.

6

0,5ooo
0,32oo
3,8ooo
63,584o

7

Želimo li zbrojiti (oduzeti) dva decimalna broja napišemo ih s jednakim brojem decimala i onda ih zbrajamo (oduzimamo) kao prirodne brojeve, a u rezultatu zadržimo isti broj decimala.

Treba zbrojiti brojeve 9,32 i 27,354. Imamo:

9,32o
27,354
36,674

Izračunaj:

a) 0,735 + 5,3 + 435,o7
b) 0,oo32 + 0,o3 + 0,oo9
c) 7,o7 + 1,3 + 0,oo8
d) 0,1 + 0,o1 + 0,oo1 + 0,ooo1

7

a) 441,1o5
b) 0,o422
c) 8,378
d) 0,1111

8

Treba oduzeti brojeve 2 i 0,oo85.

Imamo:

2,oooo
- 0,oo85
1,9915

Izračunaj:

a) 7,3 - 8,o3
b) 0,4 - 0,o32
c) 0,o1 - 0,oo1
d) 4 - 0,35

8

a) -0,73
b) 0,368
c) 0,oo9
d) 3,65

9

Pomaknemo li decimalni zarez nekog broja u desno za jedno mjesto, broj se poveća deset puta.

Ako decimalni zarez broja 2,73 pomaknemo u desno za jedno mjesto dobit ćemo broj 27,3 koji je deset puta veći od broja 2,73.

Koliko puta se poveća broj ako decimalni zarez pomaknemo u desno za:

a) dva mjesta
b) tri mjesta
c) četiri mjesta

9

a) lo puta
b) loo puta
c) looo puta

lo

Koliko puta je veći broj 45,8 od brojeva:

a) 4,58
b) 0,458
c) 0,o458

lo

a) lo puta
b) loo puta
c) looo puta

11

Pomaknemo li decimalni zarez nekog broja u lijevo za jedno mjesto, dobit ćemo broj deset puta manji.

Ako decimalni zarez broju 35,4 pomaknemo u lijevo za jedno mjesto, dobit ćemo broj 3,54, koji je deset

puta manji od broja 35,4.

Koliko puta se umanji broj ako decimalni zarez pomaknemo u lijevo za

a) dva mjesta
b) tri mjesta
c) četiri mjesta ?

11

a) za 100 puta
b) za 1000 puta
c) za 10000 puta

12

Koliko puta je broj 0,00075 manji od brojeva:

a) 0,75
b) 7,5
c) 750
d) 0,0075

12

a) 1000 puta
b) 10000 puta
c) 1000000 puta
d) 10 puta

13

Na osnovu članka 11 zaključujemo:

Decimalni broj množi se dekadskom jedinicom tako da mu se decimalni zarez pomakne u desno za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula

Npr. 0,0385 . 100 = 3,85
0,0001 . 1000 = 0,1

Izračunajte:

a) 0,0078 . 100000
b) 0,032 . 10
c) 0,005 . 1000
d) 0,000001 . 10000
e) 3,053 . 100

13

a) 78o
b) 0,32
c) 5
d) 0,ol
e) 3o5,3

14

Na osnovu članka 12 zaključujemo:

Decimalni broj dijeli se dekadskom jedinicom tako da mu se decimalni zarez pomakne u lijevo za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.

Npr.

0,o32 : loo = 0,ooo32
52,3 : looo = 0,o523

Izračunajte:

a) 0,32 : lo
b) 0,o34 : loo
c) 5 : looo
d) 0,ool : loo
e) 5,o2 : lo

14

a) 0,o32
b) 0,ooo34
c) 0,oo5
d) 0,ooool
e) 0,5o2

15

Pomnožiti neki broj decimalnom jedinicom $\frac{1}{10}$ (0,1) znači smanjiti taj broj deset puta, a to znači pomaknuti decimalni zarez u lijevo za jedno mjesto.

Pomnožiti neki broj decimalnom jedinicom $\frac{1}{100}$ (0,ol) znači smanjiti taj broj ________ puta, a to ćemo postići, ako decimalni **zarez** toga broja pomaknemo ____________ za ____________ mjesta.

15

loo puta

u lijevo

dva

16

Vrijedi općenito. Neki broj množimo decimalnom jedinicom tako da mu decimalni zarez pomaknemo u lijevo za onoliko mjesta koliko dekadska jedinica ima nula.

Npr.

0,32 . 0,1 = 0,o32

3,ol . 0,ol = 0,o3ol

32 . 0,ool = 0,o32

0,ol . 0,1 = 0,ool

loo . 0,ol = 1

Izračunajte:

a) 0,o2 . 0,1

b) 2,35 . 0,ol

c) loooo . 0,ool

d) 0,ol . 0,ool

e) 235 : 0,ol

16

a) 0,oo2

b) 0,o235

c) lo

d) 0,ooool

e) 2,35

17

Neki broj dijeli se razlomkom tako da se taj broj pomnoži recipročnom vrijednošću razlomka. Prema tome podijeliti neki broj decimalnom jedinicom $\frac{1}{10}$ (0,1) znači pomnožiti taj broj recipročnom vrijednošću od $\frac{1}{10}$, tj. brojem lo, a to opet znači pomaknuti decimalni zarez toga broja u desno za jednu jedinicu.

Na primjer:

2,3 : 0,1 = 23
0,05 : 0,1 = 0,5
0,0001 : 0,1 = 0,001

Izračunajte:

a) 543 : 0,1
b) 4 : 0,1
c) 0,3 : 0,1
d) 0,01 : 0,1

17

a) 5430
b) 40
c) 3
d) 0,1

18

Podijeliti neki broj decimalnom jedinicom $\frac{1}{100}$ (0,01), znači pomnožiti taj broj sa 100, a to opet znači pomaknuti decimalni zarez toga broja u desno za dva mjesta.

Primjeri:

2 : 0,01 = 200
0,2 : 0,01 = 20
0,003 : 0,01 = 0,3
100 : 0,01 = 10000

Izračunajte:

a) 23 : 0,01
b) 1000 : 0,01
c) 0,0023 : 0,01
d) 0,00001 : 0,01
e) 1 : 0,01

18

a) 23oo
b) looooo
c) 0,23
d) 0,ool
e) loo

19

Vrijedi općenito. Neki broj dijeli se decimalnom jedinicom tako da se decimalni zarez toga broja pomakne u desno za onoliko mjesta koliko decimalna jedinica ima nula.

Primjer:

0,3 : 0,ool = 3oo
245 : 0,oool = 245oooo
0,ool : 0,ooool = loo
loo : 0,ol = loooo

Izračunajte:

a) 3 : 0,ol
b) 3,o7 : 0,ool
c) 0,o32 : 0,oool
d) lo : 0,ooool
e) 0,ooool : 0,ool

19

a) 3oo
b) 3o7o
c) 32o
d) looOooo
e) 0,ol

2o

Želimo pomnožiti brojeve 2,12 . 0,o32. Ako ih pretvorimo u decimalne razlomke, dobivamo:

$$2,12 \cdot 0,032 = \frac{212}{100} \cdot \frac{32}{1000} = \frac{212}{10^2} \cdot \frac{32}{10^3}$$

$$= \frac{212 \cdot 32}{10^5} = \frac{6784}{10^5} = 0,06784$$

Intuicija nas navodi na slijedeće pravilo: Decimalni brojevi se množe

kao i prirodni brojevi, koje dobijemo kad izbrišemo decimalne zareze, a u dobivenom produktu odvoji se onoliko decimala koliko ih imaju zajedno obadva faktora.

Izračunajte:

a) 2,o4 . 12,3

b) 0,o72 . 3oo

c) 0,o3 . 0,oo5

d) 243 . 0,oo7

20

a) 25,o92

b) 21,6

c) 0,ooo15

d) 1,7o1

21

Pretpostavljamo da znaš dijeliti prirodne brojeve.

Želimo podijeliti broj 2,54 brojem 8.

Imamo:

$$2{,}54 : 8 = \frac{254}{1oo} : 8 = \frac{254 : 8}{1oo} = \frac{31{,}75}{1oo} =$$

$$= 0{,}3175$$

Intuicija nas navodi na slijedeće pravilo. Decimalni broj dijeli se prirodnim brojem kao i prirodni broj koji dobijemo kad u dividendu izbrišemo decimalni zarez, ali kad se dijeljenje završi, decimalni zarez kvocijenta pomaknemo u lijevo za onoliko mjesta koliko dividend ima decimala.

Još jedan primjer:

$$0{,}ooo32 : 64 = \frac{32}{1o^5} : 64 = \frac{32:64}{1o^5} = \frac{0{,}5}{1o^5} =$$

$$= 0{,}oooo05$$

Izračunaj:

a) 0,0036 : 360
b) 2,25 : 50
c) 62,5 : 25

21

a) 0,00001
b) 0,045
c) 2,5

22

Praktičnije je slijedeće pravilo:

Decimalni broj dijeli se prirodnim brojem kao i prirodni broj, ali kad se završi dijeljenje dekadskih jedinica stavlja se decimalni zarez u kvocijent.

Primjer:

134,75 : 7 = 19
64
1

Završili smo dijeljenje dekadskih jedinica i sada u kvocijent trebamo staviti zarez. Nastavljamo dijeljenje

134,75 : 7 = 19,25
64
17
35
0

Izračunaj:

a) 248,125 : 25
b) 3,74 : 7480
c) 0,0012 : 48

22

a) 9,925
b) 0,ooo5
c) 0,oooo25

23

32o : 16

23

Promatrajmo kvocijent 8 : 4. Pomnožimo li dividend i divizor redom brojevima 2, 3, 4, 5, dobit ćemo slijedeće kvocijente:

16 : 8, 24 : 12, 32 : 16,
4o : 2o.

Svi ti kvocijenti su međusobno jednaki.

Intuicija nas navodi na slijedeći zaključak. Vrijednost se kvocijenta ne mijenja ako dividend i divizor pomnožimo jednim te istim brojem.

Napiši kvocijent 0,32 : 0,o16 tako da divizor bude cijeli broj.

24

Želimo li podijeliti dva decimalna broja, moramo najprije dividend i divizor pomnožiti takvom dekadskom jedinicom da divizor postane prirodni broj. Tada upotrebimo pravilo za dijeljenje decimalnog broja prirodnim brojem.

Primjer

0,426 : 0,oo32 =

= 0,426 . 1oooo : 0,oo32 . 1oooo =

= 426o : 32 = 133,125

Izračunaj:

a) 2,o4 : 4,25

b) 2,34 : 1,125

c) 32,13 : 1,4

d) 0,oo825 : 2,5

e) 0,oo82 : 0,o41

f) 0,o1 : 0,ooo8

24 ———————————— ————————————

a) 0,48

b) 2,o8

c) 22,95

d) 0,oo37

e) 0,2

f) 125

- - . - -

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 7.

U ovom smo paragrafu naučili slijedeće:

1. Što su to dekadske a što decimalne jedinice.

2. Što je to decimalni razlomak (broj).

3. Kako se decimalni razlomci (brojevi) pišu u decimalnom sistemu.

4. Što su to decimale.

5. Kako se zbrajaju i oduzimaju decimalni brojevi.

6. Kako se neki broj množi i dijeli dekadskom jedinicom.

7. Kako se neki broj množi i dijeli decimalnom jedinicom.

8. Kako se množe decimalni brojevi.

9. Kako se dijele decimalni brojevi.

Pokušaj odgovoriti na svako od ovih 9 pitanja. Ukoliko to nisi u stanju, vrati se na odgovarajuće članke!!!

- - . - -

VII ISPIT ZNANJA

1. Izračunaj:

a) 0,o735 + 0,7 ; b) 0,oo32 + 0,o4358 ;
c) 0,ool + 0,o75 ; d) 123,o7 + 14,1o8.

2. Izračunaj:

a) 42,o3 - 35,8 ; b) 0,735 - 0,o9 ;
c) 7,o5 - 9,7 ; d) 0,ol - 5,3 ;
e) 0,oool - 0,ooool ; f) 0,o2 - 0,ool .

3. Izračunaj:

a) 23,ol . loo ; b) 3,4 . loo ; c) 0,oo23 . looo ;
d) loo . looo ; e) 0,oool . lo ; f) 4,3 . 0,1 ;
g) 0,35 . 0,ool ; h) looo . 0,ol ; i) 0,ol . 0,ool .

4. Izračunaj:

a) 24,3 : loo ; b) 0,32 : looo ; c) 0,o4 : lo ;
d) 245 : loooo ; e) 28,7 : looo ; f) 0,ool : loo ;
g) 324,3 : 0,ol ; h) 0,45 : 0,ool ; i) 0,oo45 : 0,ol ;
j) loo : 0,oool ; k) 0,ool : 0,ol ; l) 0,o75 : 0,oool .

5. Izračunaj:

a) 2,3 . 0,o7 ; b) 0,o35 . 0,o7 ; c) 23 . 0,oo8 .

6. Izračunaj na 2 decimale koje vrijede.

a) 0,o75 : 25 ; b) 24 : 0,33 ; c) 243 : 0,o7 ;
d) 1 : 0,oo4 ; e) 0,oo64 : 0,oooo8 ; f) 1 : 3,o5 ;
g) 0,o36 : 0,o6 ; h) 0,ool : 0,o5 ; i) 0,1 : 5,2 .

- - . - -

ODGOVORI NA VII ISPIT ZNANJA

1. a) 0,7735 ; b) 0,o4678 ;
c) 0,o76 ; d) 137,178 .

2. a) 6,23 ; b) 0,645 ; c) -2,65 ;
d) -5,29 ; e) 0,oooo9 ; f) 0,ol9 .

3. a) 23ol ; b) 34o ; c) 2,3 ;
d) looooo ; e) 0,ool ; f) 0,43 ;
g) 0,ooo35 ; h) lo ; i) 0,ooool .

4. a) 0,oo243 ; b) 0,ooo32 ; c) 0,oo4 ;
d) 0,o245 ; e) 0,o287 ; f) 0,ooool ;
g) 3243o ; h) 45o ; i) 0,45 ;
j) loooooo ; k) 0,1 ; l) 75o .

5. a) 0,161 ; b) 0,oo245 ; c) 0,184 .

6. a) 0,oo3o ; b) 72,12 ; c) 3471,42 ;
d) 25o ; e) 8o ; f) 0,32 ;
g) 0,6 ; h) 0,o2 ; i) 0,ol9 .

– – o – –

Paragraf 8

REALNI BROJEVI

1 Kad se sprovede redovan postupak dijeljenja svaki racionalni broj može se predstaviti pomoću decimala.

Moguća su dva slučaja:

1. Dijeljenje se "završava" poslije ograničenog broja koraka, tj. sve ostale decimale su nule.

$\frac{1}{2} = 0,5ooo...$

$\frac{1}{4} = 0,25oo...$

2. Dijeljenje se nikad ne završava

$\frac{1}{3} = 0,333...$

$\frac{1}{6} = 0,1666...$

$\frac{8}{7} = 1,142857142857...$

$\frac{79}{72} = 1,o97222...$

Ovakav način prikazivanja brojeva zove se decimalni razvoj.

Prikaži pomoću decimalnog razvoja slijedeće decimalne brojeve:

a) $\frac{7}{11}$

b) $\frac{341}{111o}$

c) $\frac{9}{8}$

1

a) 0,636363...

b) 0,3072072072...

c) 1,125000...

2

U svakom decimalnom razvoju prethodnog članka poslije nekog mjesta znamenke se ponavljaju u određenim grupama. U razvoju 0,5000... ponavlja se znamenka 0 poslije prvog decimalnog mjesta, u razvoju 0,2500... ponavlja se 0 poslije drugog decimalnog mjesta, u razvoju 0,333... ponavlja se znamenka 3 odmah poslije zareza, dok se u razvoju 1,142857142857... ponavlja grupa znamenaka (142857).

Decimalne razvoje kraće pišemo ovako:

$\frac{1}{2} = 0,5000... = 0,5\bar{0}$ (ili $0,5\dot{0}$)

$\frac{8}{7} = 1,142857142857... = 1,\overline{142857}$ ili ($1,\dot{1}4285\dot{7}$)

$\frac{79}{72} = 1,097222... = 1,097\bar{2}$ (ili $1,097\dot{2}$)

Crta nam označuje koja se grupa znamenaka ponavlja, a istu ulogu imaju i točkice.

Ova vrsta ponavljanja zove se periodsko ponavljanje pa se i takva vrsta razvoja zove periodski razvoj.

Grupa znamenaka koja se ponavlja zove se period.

Napišite slijedeće racionalne brojeve pomoću periodskih razvoja tako da period označite crticom.

a) $\frac{7}{4}$, b) $\frac{16}{15}$, c) $\frac{341}{1110}$, d) $\frac{79}{72}$, e) $\frac{3}{7}$.

2

a) $1,75\overline{0}$

b) $1,0\overline{6}$

c) $0,3\overline{072}$

d) $1,097\overline{2}$

e) $0,\overline{428571}$

3

Svaki decimalni razlomak (broj) ima period znamenku 0, pa su prema tome decimalni brojevi specijalni slučaj decimalnih razvoja.

Može se dokazati slijedeći poučak. Svaki racionalni broj može se prikazati u obliku periodskog decimalnog razvoja i obrnuto, svaki periodski decimalni razvoj je racionalan broj.

U praksi se mjesto broja $\frac{1}{3} = 0,333...$ uzimaju decimalni brojevi 0,3, 0.33, 0,333 itd. kao njegove približne vrijednosti, što ovisi od točnosti koja nam je potrebna; što više decimala uzmemo, to ćemo dobiti točniju aproksimaciju broju $\frac{1}{3}$. Isto vrijedi i za druge racionalne brojeve. Prema tome, svaki racionalni možemo po volji točno aproksimirati decimalnim brojem.

4

$\sqrt{2} = 1,414214...$

Prilikom izračunavanja drugog korijena dolazi se do decimalnog razvoja koji nije periodski, ali poznatim postupkom možemo dobiti decimala koliko hoćemo. Prema tome, može se po volji točno izračunati kvadratni korijen.

Ima dakle, brojeva koji se ne mogu prikazati pomoću periodskog razvoja, ali se zato mogu prikazati pomoću neperiodskog razvoja; oni se zovu iracionalni brojevi.

Racionalni i iracionalni brojevi zajedno čine skup realnih brojeva koje označujemo sa R.

Mogli bismo reći i ovako:

Realni broj je svaki onaj broj koji se jednoznačno može prikazati pomoću decimalnog razvoja (periodskog ili neperiodskog).

Svaki realni broj može se po volji točno aproksimirati decimalnim brojem.

- - . - -

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 8

U ovom smo paragrafu naučili:

1. Što je to decimalni razvoj.

2. Što su to periodski i neperiodski decimalni razvoji.

3. Da se svaki racionalni broj može prikazati u obliku periodskog decimalnog razvoja i obrnuto da je svaki periodski decimalni razvoj racionalan broj.

4. Što je to period periodskog decimalnog razvoja.

5. Da svaki decimalni broj ima period znamenku 0.

6. Da ima brojeva koji se ne mogu prikazati pomoću periodskog decimalnog razvoja, nego samo pomoću neperiodskog decimalnog razvoja i da se takvi brojevi zovu iracionalni brojevi.

7. Što su to realni brojevi.

8. Da se svaki realni broj može po volji točno aproksimirati realnim brojem.

- - . - -

VIII ISPIT ZNANJA

1. Prikaži pomoću decimalnog razvoja slijedeće decimalne brojeve:

   a) $\frac{1}{2}$ b) 5

   c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{5}{13}$

2. Napiši slijedeće racionalne brojeve pomoću periodskih razvoja tako da period označiš crticom:

   a) $\frac{1}{2}$ b) 5

   c) $\frac{7}{6}$ d) $\frac{5}{13}$

3. Koji su od slijedećih brojeva iracionalni brojevi ?

   a) $\sqrt{16}$ b) $\sqrt{5}$

   c) π d) $\sqrt[3]{30-3}$

- - . - -

ODGOVORI NA VIII ISPIT ZNANJA

1. a) 0,5000...

   b) 5,000...

   c) 1,1666...

   d) 0,384615384615384615...

2. a) $0,5\bar{0}$ b) $5,\bar{0}$

   c) $1,1\bar{6}$ d) $0,\overline{384615}$

3. b) c)

— — o — —

Paragraf 9

1 POTENCIJE

Svaki simbol, koji možemo zamijeniti bilo kojim realnim brojem, zove se opći broj nad skupom realnih brojeva.

Svaki simbol, koji možemo zamijeniti bilo kojim elementom nekog podskupa realnih brojeva, zove se opći broj nad tim podskupom. Tako možemo imati opće brojeve nad skupom prirodnih brojeva, nad skupom cijelih brojeva, nad skupom racionalnih brojeva itd.

Za opće brojeve upotrebljavamo najčešće slova. Tako nam npr. slova a, b,..., A, B,... mogu značiti opće brojeve.

1

2

a . a . a . a je produkt jednakih faktora.

Produkt jednakih faktora zove se potencija.

Koji je od slijedećih produkata potencija?

a) 2 . 2 . 2 . 2

b) 2 . 2 . 3 . 3

c) b . b . b . c . d

d) (ab).(ab).(ab)

e) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$

2

a)

d)

e)

3

U potenciji a.a.a.a broj a dolazi više puta kao faktor. Taj broj se zove baza te potencije.

Odredi baze slijedećih potencija:

a) 3.3.3

b) (ab).(ab).(ab).(ab)

c) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$

d) $(\frac{ac}{d}).(\frac{ac}{d}).(\frac{ac}{d})$

3

a) 3

b) ab

c) $\frac{a}{b}$

d) $\frac{ac}{d}$

4

Produkt jednakih faktora zove se ______________. Broj koji više puta dolazi kao faktor zove se ______________ potencije.

4

potencija

baza

5

U potenciji a.a.a.a broj a dolazi 4 puta kao faktor. Broj 4 zove se eksponent te potencije.

Odredi eksponente slijedećih potencija:

a) 4.4.

b) c.c.c.c.c

c) (ab)(ab)(ab)

d) $(\frac{ac}{d})(\frac{ac}{d}).(\frac{ac}{d}).(\frac{ac}{d})$

5

a) 2

b) 5

c) 3

d) 4

6

Eksponent potencije je broj koji nam pokazuje koliko smo puta bazu uzeli kao ______________.

6

faktor

7

Potencija $\underbrace{a.a.a.a.\ldots.a}_{n\ \text{faktora}}$ piše se kraće a^n i čita se "a na n-tu" ili "a, eksponent n".

Kako ćemo kraće napisati potencije

a) 2.2.2.2.2.2

b) $\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b}$

c) (ab)(ab)(ab)(ab)

d) $\frac{ac}{b} \cdot \frac{ac}{b}$

7

a) 2^6

b) $(\frac{a}{b})^3$

c) $(ab)^4$

d) $(\frac{ac}{b})^2$

8

Kod potencije a^n, a je baza, a n je eksponent.

Što je baza, a što je eksponent kod potencija:

a) 2^r $(r \in N)$

b) $(\frac{a}{b})^{1o}$

c) $(a.b)^2$

d) $(\frac{ac}{b})^6$

8

a) 2, r.

b) $\frac{a}{b}$, lo

c) (ab), 2

d) $\frac{ac}{b}$, 6

9

Definiramo:

$a^1 = a$

Izračunaj:

a) 3^1

b) $(\frac{a}{b})^1$

c) $(\frac{a.c}{b})^1$

9

a) 3

b) $\frac{a}{b}$

c) $\frac{a.c}{b}$

lo

Zbrajati se mogu samo potencije je imaju jednake baze i jednake eksponente. Npr.

$a^3 + a^3 + a^3 = 3a^3$

Zbroji potencije:

a) $a^2 + a^2 + a^2 + a^2$

b) $(\frac{a}{b})^3 + (\frac{a}{b})^3$

c) $(a.b)^4 + (a.b)^4 + (a.b)^4$

lo

a) $4a^2$

b) $2(\frac{a}{b})^3$

c) $3(ab)^4$

11

$$a^3 \cdot a^4 = \underbrace{(a.a.a)}_{\substack{3\\ \text{faktora}}} \cdot \underbrace{(a.a.a.a)}_{\substack{4\\ \text{faktora}}} =$$

$$= \underbrace{a.a.a.a.a.a.a}_{7 \text{ faktora}} = a^7$$

Općenito vrijedi:

$$\boxed{a^n \cdot a^r = a^{n+r}}$$

gdje su n i r bilo koji prirodni brojevi ?

Riječima. Potencije jednakih baza množe se tako da se zajednička baza ~~potencira zbrojem eksponenata.~~

Pomnoži potencije:

a) $2^4 \cdot 2^3$

b) $a^s \cdot a^t$ (r N, t N)

c) $(\frac{ab}{c})^2 \cdot (\frac{ab}{c})^3 \cdot \frac{ab}{c}$

d) $s^3 \cdot s^2$

11

a) 2^7

b) a^{s+t}

c) $(\frac{ab}{c})^6$

d) s^5

12

$$a^4 . b^4 = \underbrace{(a.a.a.a)}_{4 \text{ faktora}} \cdot \underbrace{(b.b.b.b)}_{4 \text{ faktora}} =$$

$$= \underbrace{(ab).(ab).(ab).(ab)}_{4 \text{ faktora}} = (ab)^4$$

Općenito:

$$a^n . b^n = (a.b)^n \quad (n \in N)$$

Riječima: Potencije jednakih eksponena-ta množe se tako da se produkt baza po-tencira zajedničkim eksponentom.

Pomnoži slijedeće potencije:

a) $0,25^{10} . 4^{10}$

b) $0,25^3 . 8^3$

c) $5^3 . a^3$

d) $2^r . (0,5)^r \quad (r \in N)$

12

a) 1

b) 2^3

c) $(5a)^3$

d) 1

13

Ako jednakost $a^n . b^n = (a.b)^n$ či-tamo iz desna u lijevo, dobivamo:

$$(a.b)^n = a^n . b^n$$

Riječima: Produkt dvaju brojeva se po-tencira nekim brojem tako da se tim bro-jem potencira svaki faktor

$$(\tfrac{1}{2}x)^2 = (\tfrac{1}{2})^2 . x^2 = \tfrac{1}{4}x^2$$

Potenciraj slijedeće produkte:

a) $(-xy)^3$

b) $(2ab)^2$

c) $(\frac{2}{3}ay)^2$

d) $(-\frac{1}{2}x)^3$

13 ——— 14 ———

a) $(-x)^3y^3 = -x^3y^3$

b) $4a^2b^2$

c) $\frac{4}{9}a^2y^2$

d) $(-\frac{1}{2})^3x^3 = -\frac{1}{8}x^3$

$$a^5 : a^3 = \frac{\overbrace{a.a.a.a.a}^{5\text{ faktora}}}{\underbrace{a.a.a}_{3\text{ faktora}}} = \underbrace{a\;.\;a}_{2\text{ faktora}} = a^2$$

Općenito:

$$a^n : a^r = a^{n-r} \quad (n \in N,\ r \in N,\ n > r)$$

Riječima. Potencije jednakih baza dijele se tako da se zajednička baza potencira razlikom eksponenta dividenda i eksponenta divizora.

Podijeli slijedeće potencije:

a) $2^4 : 2^3$

b) $(\frac{a}{b})^5 : (\frac{a}{b})^3$

c) $(\frac{ac}{b})^4 : (\frac{ac}{b})^2$

d) $2^r : 2^s \quad (r > s,\ r \in N,\ s \in N)$

14 ——— 15 ———

a) 2

b) $(\frac{a}{b})^2$

c) $(\frac{a.c}{b})^2$

d) 2^{r-s}

$$a^3 : b^3 = \frac{a^3}{b^3} = \frac{a.a.a}{b.b.b} = \underbrace{\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}\cdot\frac{a}{b}}_{3\text{ faktora}} = (\frac{a}{b})^3$$

Općenito:

$$a^n : b^n = (a:b)^n = (\frac{a}{b})^n$$

Riječima. Potencije jednakih eksponenata dijele se tako da se bazu dividenda podijeli bazom divizora i taj kvocijent potencira zajedničkim eksponentom.

Podijeli slijedeće potencije:

a) $0{,}036^3 : 0{,}006^3$

b) $0{,}01^3 : 0{,}001^3$

c) $(\frac{xy}{z})^3 : (xy)^3$

d) $6^r : 3^r \quad (r \in N)$

15

a) 6^3

b) 10^3

c) $(\frac{1}{z})^3$

d) 2^r

16

Ako jednakost $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$

čitamo iz desna u lijevo, možemo pisati

$$(\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Riječima: Razlomak se potencira tako da se potencira i brojnik i nazivnik.

Primjer:

$$(\frac{2}{a})^3 = \frac{2^3}{a^3} = \frac{8}{a^3}$$

Potenciraj slijedeći razlomak:

a) $(\frac{-2}{x})^2$ b) $(\frac{a}{4})^2$ c) $(\frac{b}{-2})^4$

d) $(\frac{2xy}{3})^2$ e) $(\frac{3ab}{2x})^3$

16

a) $\frac{4}{x^2}$

b) $\frac{a^2}{16}$

c) $\frac{b^4}{(-2)^4} = \frac{b^4}{2^4}$

d) $\frac{4x^2y^2}{9}$

e) $\frac{27a^3b^3}{8x^3}$

17

$$(a^3)^2 = \underbrace{(a.a.a)^2}_{3\ \text{faktora}} = \underbrace{(a.a.a)}_{3\ \text{faktora}}.\underbrace{(a.a.a)}_{3\ \text{faktora}} =$$

$$= \underbrace{a.a.a.a.a.a}_{2.3\ \text{faktora}}$$

Općenito:

$$(a^n)^r = a^{nr}$$

Riječima. Potencija se potencira tako da se baza potencira produktom eksponenata.

Potenciraj:

a) $(2^2)^3$

b) $\left[(\frac{a}{b})^3\right]^4$

c) $\left[(\frac{xy}{z})^2\right]^2$

17

a) 2^6

b) $(\frac{a}{b})^{12}$

c) $\frac{x^4y^4}{z^4}$

18

$a^n = b$. Broj b zove se vrijednost potencije. Ako je baza negativna, a eksponent paran broj, vrijednost potencije je uvijek pozitivna.

Na primjer:

$$(-2)^6 = 64$$

Ako je baza negativna, a eksponent neparan broj, vrijednost potencije je uvijek negativna.

Na primjer:

$$(-2)^5 = -32$$

Općenito:

$$a^{2n} > 0 \quad (a < 0, \quad n \in N)$$

$$a^{2n+1} < 0 \quad (a < 0, \quad n \in N)$$

1. Odredi vrijednosti slijedećih potencija:

   a) $(-\frac{2}{3})^3$, b) $(-\frac{1}{2})^4$,

   c) $(-\frac{4}{3})^2$, d) $(-\frac{1}{2})^5$

2. Odredi predznake vrijednosti slijedećih potencija:

   a) $(-1)^{4n}$, b) $(-1)^{8n+1}$,

   c) $(-2)^{4n+1}$

18

1. a) $-\frac{8}{27}$, b) $\frac{1}{16}$, c) $-\frac{1}{32}$

2. a) +, jer je 4n paran broj

   b) –, jer je 8n+1 neparan broj

   c) –, jer je 4n+1 neparan broj.

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 9

U ovom smo paragrafu naučili definiciju potencije i pravila za računske operacije potencijama.

Definicija. Potencija je produkt jednakih faktora. Broj koji više puta dolazi kao faktor zove se baza potencije, a broj koji nam pokazuje koliko puta baza dolazi kao faktor, zove se eksponent potencije.

Pravilo za računanje s potencijama:

1. $a^n \cdot a^r = a^{n+r}$

2. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$

3. $a^n : a^r = a^{n-r}$

4. $a^n : b^n = (a:b)^n = (\frac{a}{b})^n$

5. $(a^n)^r = a^{nr}$

- - . - -

IX ISPIT ZNANJA

1. Koji je od slijedećih produkata potencija:

   a) $a.a.a.b$, b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, c) $\frac{ab}{2}\cdot\frac{ab}{2}\cdot\frac{ab}{2}$,

   d) $\frac{ax}{y}\cdot ax\cdot c$, e) $\frac{xyz}{ab}\cdot\frac{xyz}{ab}$

2. Odredi baze slijedećih potencija:

   a) $\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2a}\cdot\frac{1}{2a}$, c) $(xyz).(xyz)$,

   d) $(x-\frac{1}{2})(X-\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})$, e) $\frac{xy}{5}\cdot\frac{xy}{5}$

3. Odredite eksponente slijedećih potencija:

   a) $\frac{2}{3a}\cdot\frac{2}{3a}\cdot\frac{2}{3a}\cdot\frac{2}{3a}$, b) $\frac{xyz}{ab}\cdot\frac{xyz}{ab}$, c) $\frac{a}{z}$,

   d) $(abx).(abx).(abx)$.

4. Kako ćemo kraće napisati potencije:

   a) $\frac{2}{3a}\cdot\frac{2}{3a}\cdot\frac{2}{3a}\cdot\frac{2}{3a}\cdot\frac{2}{3a}$, b) $(\frac{1}{2}a).(\frac{1}{2}a)$,

   c) $ay\cdot ay\cdot ay\cdot ay$, d) $(x-y)(x-y)(x-y)$.

5. Što je baza, a što eksponent kod potencija:

   a) $(\frac{2}{x}-3)^3$, b) $(\frac{a}{bc})^4$, c) $(xy)^5$, d) $(x-y+z)^2$, e) y.

6. Izračunaj: a) $a^2+a^2+a^2-a^2$, b) $(\frac{xy}{2})^3+(\frac{xy}{2})^3-(\frac{xy}{2})^3$,

   c) $(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{a})^2+(\frac{1}{2})^2$.

7. Izračunaj: a) $(-3)^2.(-3)^3$, b) $x^s.x^r$, c) $(\frac{x}{ab})^3.(\frac{x}{ab})^4$,

   d) $t^2.t^3.t.t^4$.

8. Izračunaj: a) $(0,2)^{100}.5^{100}$, b) $(0,25)^5.8^5$, c) $7^3.x^3$,

   d) $4^s.0,25^s$, e) $(\frac{1}{2})^4.(\frac{2}{3})^4.3^4$.

9. Potenciraj: a) $(-2ab)^3$, b) $(\frac{2}{5}y)^2$, c) $(\frac{1}{3}xyz)^3$.

10. Izračunaj: a) $3^4 : 3^2$, b) $(\frac{a.b}{c})^{10} : (\frac{a.b}{c})^7$, c) $7^r : 7^a$.

11. Izračunaj: a) $0{,}01^3 : 0{,}001^3$, b) $0{,}3^4 : 3^4$, c) $(\frac{2}{3})^5 : (\frac{1}{3})^5$,

d) $(\frac{ab}{c})^5 : (\frac{a}{c})^5$, e) $8^t : 2^t$

12. Potenciraj: a) $(\frac{xy}{3})^3$, b) $(-2xy)^3$, c) $(3^2)^2$, d) $(t^2)^5$,

e) $\left[(\frac{x}{y})^3\right]^4$.

13. Odredi vrijednosti potencija:

a) $(-\frac{1}{3})^4$, b) $(-\frac{1}{3})^5$.

14. Odredi predznak vrijednosti slijedećih potencija:

a) $(-3)^{2n+1}$, $n \in N$; b) $(-3)^{6n+1}$, $n \in N$;

c) $(-3)^{10n}$, $n \in N$.

- - . - -

ODGOVORI NA IX ISPIT ZNANJA

1. b, c, e. 2. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{1a}$, c) xyz, d) $x - \frac{1}{2}$, c) $\frac{xy}{5}$.

3. a) 4, b) 2, c) 1, d) 3.

4. a) $(\frac{2}{3a})^5$, b) $(\frac{1}{2}a)^2$, c) $(ay)^4$, d) $(x-y)^3$.

5. a) $\frac{2}{x} - 3$, 3, b) $\frac{a}{bc}$, 4, c) xy, 5, d) x-y+z, 2, e) y, 1.

6. a) $2a^2$, b) $(\frac{xy}{2})^3$, c) $(\frac{i}{a})^2$.

7. a) $(-3)^5$, b) x^{s+r}, c) $(\frac{x}{ab})^7$, d) t^{10}.

8. a) 1, b) 2^5, c) $(7x)^3$, d) 1, e) 1.

9. a) $-8a^3b^3$, b) $\frac{4}{25}y^2$, c) $\frac{1}{27}x^3y^3z^3$.

1o. a) 3^2, b) $(\frac{ab}{c})^3$, c) 7^{r-a}.

11. a) 10^3, b) $0,1^4$, c) 2^5, d) b^5, e) 4^t

12. a) $\frac{x^3y^3}{27}$, b) $-8x^3y^3$, c) 3^4, d) t^{10}, e) $\frac{x^{12}}{y^{12}}$.

13. a) $\frac{1}{81}$, b) $-\frac{1}{243}$.

14. a) –; jer je 2n+1 neparan broj, b) –, jer je 6n+1 neparan broj,
c) +, jer je 1on paran broj.

– – o – –

Paragraf 1o

BROJNI IZRAZI I IZRAČUNAVANJE VRIJEDNOSTI BROJNIH IZRAZA

1 ______________________________

Skup posebnih ili općih brojeva ili i jednih i drugih, povezanih sa znakovima računskih operacija zove se brojni izraz ili ukratko izraz.

Tvorevine oblika

$x + y$, $\frac{5x}{z}$, $-2+8$, $8a^2b - 4c + d$, 0, $\frac{a\sqrt{c}}{4x-\sqrt{b}}$ itd. zovu se ________ ________

1 ______________________________

brojni

izrazi

2 ______________________________

Ako u brojnom izrazu dolaze opći brojevi a i b , označit ćemo ga kraće sa f(a,b) ili sa g(a,b) ili sa r(a,b) itd. Ako u brojnom izrazu dolazi samo jedan opći broj npr. x, onda ćemo ga označiti sa f(x) ili sa g(x) ili sa r(x) itd.

Kako bi kraće označio brojni izraz

$2ac - 3bc + 5$?

2

$f(a,b,c)$, $g(a,b,c)$,

$r(a,b,c)$ itd.

3

Ako imamo brojni izraz:

$f(a,b) = 5a+6b$, onda će nam $f(2,3)$ značiti vrijednost izraza $5a+6b$ koju dobijemo ako broj a zamijenimo brojem 2, a broj b brojem 3, tj.:

$$f(2,3) = 5.2 + 6.3 = 10+18 = 28$$

Nađite:

$f(0,1)$, $f(-\frac{1}{2}, 0)$, $f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6})$.

3

$f(0,1) = 6$

$f(-\frac{1}{2},0) = -\frac{5}{2}$

$f(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}) = -\frac{8}{3}$

4

Ako imamo izraz:

$g(x) = 2x^2 - 5x + 3$,

onda će nam $g(0)$ značiti vrijednost izraza $2x^2 - 5x + 3$ koju dobijemo ako opći broj x zamijenimo brojem 0, tj.

$$f(0) = 2 . 0^2 - 5 . 0 + 3 = 3$$

Nađi:

$g(\frac{1}{2})$, $g(-1)$, $g(-\frac{1}{3})$.

4

$g(\frac{1}{2}) = 1$

$g(-1) = 10$

$g(-\frac{1}{3}) = \frac{44}{9}$

5

Neka je zadan izraz:

$$r(x,y,z) = \frac{x^2-2y^2+z-5}{x-y+2x}$$

Imamo:

$$r(1,2,0) = \frac{1^2-2 \cdot 2^2+0-5}{1-2+2.0} = \frac{1-8-5}{1-2} =$$

$$= \frac{-12}{-1} = 12$$

Nađi: a) $r(\frac{1}{2},0, -\frac{1}{3})$

b) $r(-1, -\frac{1}{2}, 2)$

c) $r(0,0, -\frac{1}{2})$

5

a) $\frac{61}{2}$

b) $-\frac{5}{7}$

c) $-\frac{11}{2}$

6

Ako je $r(x) = 2x+3$, $s(x) =$

$s(x) = x^2+2x^3$,

tada je $r(x)+s(x) = (2x+3)+(x^2+2x^3)$

Izraz $r(x)+s(x)$ označimo sa $t(x)$ tj. $t(x) = r(x)+s(x)$.

Zamijenimo li slovo x brojem (-2), dobivamo:

$$t(-2) = r(-2)+s(-2) = 2.(-2)+3+(-2)^2+$$
$$+2.(-2)^3 = -4+3+4-16 = -13$$

Nađite:

a) $t(0)$, b) $t(-1)$, c) $t(\frac{1}{2})$

6

a) 3

b) 0

c) $\frac{9}{2}$

X ISPIT ZNANJA

1. Zadano je $s(t) = 5 - \frac{7}{2}t^2$. Nađi $s(\frac{1}{2})$

2. Zadano je $t(a) = a^3 - 2a^2 + 5a - 6$. Nađi $t(0)$

3. Zadano je $f(x,y) = \frac{4x-3y}{xy-1}$. Nađi $f(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$

4. Zadano je $s(a,b,c) = \frac{7a^2-5ab+4c^2}{4-4abc}$. Nađi $s(2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

5. Zadano je $g(x) = \frac{5-\sqrt{8x}}{x^2-\sqrt{18x}}$. Nađi $g(2)$

6. Neka je $r(x) = 2x - 3$ i $g(x) = \frac{x^2}{2}$. Označimo: $r(x)+g(x) = f(x)$.

Nađi a) $f(0)$, b) $f(0,5)$

7. Neka je $r(x) = -\frac{a}{2} + 3$ i $g(b) = b + 2b^2$. Označimo:

$r(a) + g(b) = f(a,b)$. Nađi: a) $f(0,o)$, b) $f(0,1)$.

- - . - -

ODGOVORI NA X ISPIT ZNANJA

1. $\frac{33}{8}$

2. -6

3. $-\frac{18}{7}$

4. $\frac{34}{5}$

5. $-\frac{1}{2}$

6. a) -3, b) $-\frac{15}{8}$

7. a) 3, b) 6.

- - o - -

Paragraf 11

JEDNAKOSTI

1 ---

U cijeloj matematici znak jednakosti "=" označava da su simboli na jednoj i na drugoj strani tog znaka ista ili različita imena za istu stvar. Na primjer 5 = 2+3 znači da su 5 i 2+3 različiti simboli za isti broj "pet". Slično tome jednakost $A = \{2, 1, 0\}$ znači da su skupovi A i (2, 1, 0) istovjetni.

Istinita rečenica koja sadrži znak "=" naziva se jednakost.

Koje su od slijedećih rečenica jednakosti ?

1. 7 = 7
2. 4 + 3 = 1o - 5
3. $5 < 6$
4. 8 + 3 = 2o - 3
5. 5 . 2 = 1o

1 ---

1, 4, 5

2 ---

a) Za jednakost vrijedi zakon refleksivnosti

a = a

b) Za jednakost vrijedi zakon simetrije:

Ako je $a=b$, onda je $b=a$

Primijeni zakon simetrije za jednakost $c(a+b) = ac+bc$

2

$ac + bc = c(a+b)$

3

Zakon simetrije omogućava nam da jednu jednakost čitamo iz lijeva u desno i obrnuto, iz desna u lijevo.

Tako npr. jednakost

$$c(a+b) = ac + bc$$

izražava poznati zakon distribucije

Čitamo li tu jednakost od desna u lijevo dobivamo:

$$ac + bc = c(a+b),$$

a ova nam jednakost kazuje da se zajednički faktor dvaju pribrojnika dade izlučiti ispred zagrade.

Pođi od jednakosti $c(a+b) = ac + bc$ i primijeni zakon simetrije na zbrojeve

1. $3,2 + 3.5$

2. $9 + 6$

3

$3(2+5)$, $3(3+2)$

4

Jednakost

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

nam kazuje kako se množe potencije jednakih eksponenata.

Izračunaj $(2 \cdot 3)^2$ primjenjujući zakon refleksije na gornju jednakost.

4

$(2.3)^2 = 2^2.3^2 = 4.9 = 36$

5

Za jednakost vrijedi zakon tranzitivnosti:

Ako je a=b i b=c, onda je i a=c

Ako Zlatko ima isto toliko godina koliko i Zoran i ako Zoran ima isto toliko godina kao i Biserka, onda su Zlatko i Biserka jednako stari.

Primjenom zakona tranzitivnosti nađi a iz

$$a + 2 = b, \quad b = 10$$

5

$a + 2 = 10$ i odavde
$a = 8$

6

Zakon tranzitivnosti glasi:
Ako je a=b i b=c, onda je i a=c.
Primijenimo li na jednakost b=c zakon refleksije dobivamo: c=b

Zakon tranzitivnosti sada prelazi u tvrdnju:

Ako je $a = b$ i $c = b$, onda je i $a = c$, tj. ako su dvije veličine jednake trećoj, onda su jednake i međusobno. Ovu tvrdnju često upotrebljavamo pri rješavanju raznih zadataka u matematici.

Neka je $5-a = b$ i $2 = b$. Tada mora biti $5-a = 2$ i odavde $a = 3$.

Ako je $10+a = c$ i $5 = c$ - koliki je a ?

6 ———

7 ———

$a = -5$

Aksiom. Ako objema stranama jednakosti dodamo ili oduzmemo iste veličine, dobit ćemo opet jednakost.

Ako je $a=b$, onda je i $a \pm c = b \pm c$

Iz $7 = 7$ slijedi:

1. $7+4 = 7+4$ ili $11 = 11$
2. $7-4 = 7-4$ ili $3 = 3$

U prvom smo slučaju lijevoj i desnoj strani jednakosti $7=7$ dodali 4 i dobili $11=11$; dakle opet jednakost. U drugom smo slučaju lijevoj i desnoj strani te iste jednakosti oduzeli 4 i dobili $3=3$, što je opet jednakost.

1. Od lijeve i desne strane jednakosti $-8 = -6-2$ oduzmi (-6)
2. Lijevoj i desnoj strani jednakosti $1 = 7-6$ dodaj 6.

7

1. $-2 = -2$

2. $7 = 7$

8

$b + 7 - 7 = 10 - 7$ ili

$b = 3$

8

Neka bude:

$a - 6 = 3$

Ako lijevoj i desnoj strani dodamo 6 dobivamo:

$a - 6 + 6 = 3+6$ ili $a = 9$.

Neka je $b+7 = 10$. Nađi b tako da od lijeve i desne strane oduzmeš isti broj.

9

Aksiom. Ako obje strane jednakosti pomnožimo istim brojem, dobijemo opet jednakost.

Ako je $a = b$ onda je $a.c = b.c$

Ako lijevu i desnu stranu jednakosti $6 = 6$ pomnožimo sa 2, dobivamo $12 = 12$, a to je opet jednakost.

Pomnoži jednakost $-\frac{2}{3} = -\frac{4}{6}$ sa (-6)

9

$(-\frac{2}{3}).(-6) = (-\frac{4}{6}).(-6)$

1o

$-\frac{2}{3}t = \frac{1}{5} \,/ .(-\frac{3}{2})$

$(-\frac{2}{3})t.(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{5}.(-\frac{3}{2})$

$t = -\frac{3}{1o}$

1o

Neka je $\frac{1}{3}b = 1$. Pomnožimo li lijevu i desnu stranu sa 3, dobivamo $b = 3$.

1. Neka je $-\frac{1}{5}b = 2$. Nađi b tako da lijevu i desnu stranu pomnožiš jednim te istim brojem.

1. Neka je $-\frac{2}{3}t = \frac{1}{5}$. Nađi t tako da lijevu i desnu stranu pomnožiš jednim te istim brojem.

11

Aksiom. Ako obje strane jednakosti podijelimo istim brojem, različitim od nule, dobijemo opet jednakost.

Ako je $a=b$ i $c\neq 0$ onda je $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

Podijelimo li jednakost 6=6 sa 2, dobijemo 3=3 ; dakle opet jednakost.

Podijeli jednakost 8 = 8 sa (-2)

11

$8 = 8 \;/ : (-2)$

$-4 = -4$

12

1. $-4a = 8 \;/ : (-4)$

$\frac{-4a}{-4} = \frac{8}{-4}$

$a = -2$

2. $(-\frac{2}{3}t) = \frac{1}{5} \;: (-\frac{2}{3})$

$(-\frac{2}{3}t) : (-\frac{2}{3}) = \frac{1}{5} : (-\frac{2}{3})$

$t = -\frac{3}{10}$

12

Neka je $2a = 4$. Podijelimo li lijevu i desnu stranu sa 2, dobivamo $a = 4$.

1. Neka je $-4a = 8$. Nađi a tako da lijevu i desnu stranu podijeliš jednim te istim brojem.
2. Neka je $-\frac{2}{3}t = \frac{1}{5}$. Nađi t tako da lijevu i desnu stranu podijeliš jednim te istim brojem.

- - o - -

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 11

U ovom smo paragrafu naučili definiciju jednakosti i svojstva jednakosti.

Definicija. Istinita rečenica, koja sadrži znak "=", zove se jednakost.

Svojstva jednakosti

1. $a = a$ (zakon refleksivnosti)

2. Ako je $a = b$, onda je $b = a$ (zakon simetrije)

3. Ako je $a = b$ i $b = c$, onda je $a = c$ (zakon tranzitivnosti)

4. Ako je $a = b$ i $c = b$, onda je $a = c$ (posljedica zakona simetrije i zakona tranzitivnosti)

5. Ako objema stranama jednakosti dodamo ili oduzmemo isti broj, dobit ćemo opet jednakost

6. Ako obje strane jednakosti pomnožimo ili podijelimo istim brojem, dobijemo opet jednakost (jedino se ne smije dijeliti nulom).

- - ° - -

XI ISPIT ZNANJA

1. Koje su od slijedećih rečenica jednakosti: a) $5 > 3$, b) $2+3 = 1+4$, c) $4-2 = 5+3$, d) $8:2 = 4$, e) $3 \cdot 2 = 5$

2. Znamo da vrijedi zakon distribucije: $a(c+b) = ac + ab$. Upotrebi zakon refleksije i napiši čemu je jednak zbroj: a) $5 \cdot 7 + 5 \cdot 9$, b) $at + bt$, c) $abz + cdz$

3. Za dijeljenje potencija jednakih eksponenata vrijedi pravilo: $\frac{a^n}{b^n} = (\frac{a}{b})^n$. Upotrebom zakona refleksije izračunaj: a) $(\frac{a}{4})^2$, b) $(\frac{2}{b})^3$

4. Neka je: a) $t-2 = r$ i $r = 5$, b) $t = a-2$ i $a-2 = 3$, c) $4-t = b$ i $b = 0$. Upotrebom zakona tranzitivnosti nađi t.

5. Ako je $a = c$ i $b = c$, onda je $a = b$. Na osnovu toga svojstva nađi s ako je: a) $s = r-3$ i $5 = r-3$, b) $s-3 = t$ i $2 = t$

6. Lijevoj i desnoj strani jednakosti $9 = 9$ dodaj (-6)

7. Od lijeve i desne strane jednakosti $-6 = -6$ oduzmi broj (-6)

8. Neka je: a) $t-4 = 5$, b) $3+t = 2$, c) $-2 = t+3$. Nađi t tako da lijevoj i desnoj strani pribrojiš jedan te isti broj

9. Neka je: a) $s+2 = 0$, b) $0 = s-3$, c) $s+2 = 5$. Nađi t tako da od lijeve i desne strane oduzmeš jedan te isti broj

10. Neka je: a) $\frac{1}{4}c = 7$, b) $\frac{c}{7} = 1$, c) $-\frac{2}{3}c = \frac{7}{3}$. Nađi c tako da lijevu i desnu stranu jednakosti pomnožiš jednim te istim brojem.

11. Neka je: a) $2r = 7$, b) $0,072r = 0,09$, c) $-\frac{4}{3}r = \frac{5}{4}$. Nađi r tako da lijevu i desnu stranu jednakosti podijeliš jednim te istim brojem.

- - . - -

ODGOVORI NA XI ISPIT ZNANJA

1. b), d) 2. a) 5(7+5), b) t(a+b), c) z(ab+cd)

3. a) $\frac{a^2}{16}$, b) $\frac{8}{b^3}$ 4. a) t-2 = 5 i odavde t = 7; b) t = 3, c) 4-t = 0 i odavde t = 4.

5. a) s = 5, b) s-3 = 2 i odavde s = 5.

6. 9 +(-6) = 9 +(-6) i odavde 3 = 3.

7. (-6)-(-6) = (-6)-(-6) i odavde 0 = 0.

8. (t-4)+4 = 5+4 i odavde t = 9; b) (3+t)+(-3) = 2+(-3) i odavde t = -1; c) -2+(-3) = (t+3)+(-3) i odavde t = -5.

9. a) (s+2)-2 = 0-2 i odavde s = -2; b) 0-(-3) = (s-3)-(-3) i odavde s = 3; c) (s+2)-2 = 5-2 i odavde s = 3.

10. a) $(\frac{1}{4}c).4 = 7.4$ i odavde c = 28; b) $\frac{c}{7}.7 = 1.7$ i odavde c = 7; c) $(-\frac{2}{3}c).(-\frac{3}{2}) = \frac{7}{3}.(-\frac{3}{2})$ i odavde $c = -\frac{21}{6}$.

11. a) 2r : 2 = 7 : 2 i odavde $r = \frac{7}{2}$; b) 0,072r : 0,072 = 0,09:0,072 i odavde r = 1,25; c) $(-\frac{4}{3})r : (-\frac{4}{3}) = \frac{5}{4} : (-\frac{4}{3})$ i odavde $r = -\frac{15}{16}$.

- - o - -

Paragraf 12

IZJAVNE FUNKCIJE

1

Smislena rečenica koja nešto tvrdi i za koju možemo jednoznačno kazati da li je istinita ili lažna, naziva se izjava (sud).

Rečenica "$5<7$" tvrdi da je broj 5 manji od broja 7. Ta tvrdnja je istinita. Kažemo da je rečenica "$5<7$" istinita izjava.

Rečenica $5+3 = 0$ je lažna izjava (lažni sud).

Koje su od donjih izjava istinite izjave:

1. $-2<0$
2. $-4 = 2$
3. $5-2 = 3$
4. $4>0$

1

1, 3, 4

2

Rečenica "$2x = 4$" nije izjava jer ne možemo kazati da li je ta rečenica istinita ili ne, jer ne znamo vrijednost za x

Koje su od donjih rečenica izjave:

1. $5 + 3<3$
2. $2x>3$

3. $5x-4 = 0$

4. -6 -8

2 ——————————— 3 ———————————

1, 4.

Rečenica $2x>3$ nije izjava, jer za nju ne možemo kazati niti da je istinita niti da je lažna jer ne znamo koliki je x. Isto vrijedi i za rečenicu $5x-4 = 0$.

Sada kada smo naučili što je to izjava, možemo jednakost definirati na slijedeći način:

"Jednakost je istinita izjava koja sadrži znak = ".

Koje su od slijedećih rečenica jednakosti ?

a) $2x-3 = 0$,

b) $5+3 = 10-2$

c) $4>3$

d) $3-2 = 5$

3 ——————————— 4 ———————————

b

U prvom razredu osnovne škole od interesa su samo prirodni brojevi. U matematici kod razmatranja nekog problema često nas zanimaju samo elementi nekog određenog skupa. Taj skup se naziva univerzalni skup za dotično razmatranje.

Ako nas kod nekog problema zanimaju samo elementi nekog određenog skupa, onda se taj skup naziva ___________ skup

4 ——————

univerzalni

5 ——————

Univerzalni skup bilježit ćemo slovom U.

Slovo koje možemo zamijeniti bilo kojim elementom univerzalnog skupa U, naziva se varijabla.

Varijabla je ________ koje možemo zamijeniti bilo kojim elementom ________ ________ skupa.

5 ——————

slovo

univerzalnog

6 ——————

Neka univerzalni skup bude skup brojeva od 1 do 3, tj. skup $\{1, 2, 3\}$, a varijabla slovo x.

Rečenica $4x>8$ sadrži varijablu x.

Je li ta rečenica izjava ?

6 ——————

nije

7 ——————

Ako varijablu x u rečenici $4x>8$ zamijenimo elementima univerzalnog skupa $U = \{1,2,3\}$, dobit ćemo slijedeće rečenice:

$4 \cdot 1>8$, $4 \cdot 2>8$, $4 \cdot 3>8$

Svaka od ovih rečenica je suvisla i nešto tvrdi; prva i druga su lažne, a treća je istinita. Prema tome svaka od ovih rečenica je izjava.

U rečenici "2x = 8" zamijeni varijablu x elementima univerzalnog skupa {1, 2, 3, 4}.

Za koje elemente univerzalnog skupa ta rečenica postaje istinita izjava ?

7 ———— 8 ————

4

Rečenica koja sadrži varijablu i koja postaje izjava (sud) kad se ta varijabla zamijeni bilo kojim elementom univerzalnog skupa U, naziva se izjavna funkcija (sudovna funkcija).

Ako je U univerzalni skup, a slovo x varijabla, onda su na primjer rečenice "$2x<7$", "$x+3 = 4$" izjavne (sudovne) funkcije nad skupom U.

Izjavna (sudovna) funkcija nad skupom U je rečenica koja sadrži ________ i koja postaje izjava kad tu varijablu zamijenimo bilo kojim elementom________ ________ skupa.

8 ———— 9 ————

varijablu

univerzalnog

Uzmimo izjavnu (sudovnu) funkciju

$$2x>4$$

i univerzalni skup U = {1, 2, 3, 4}. Zamijenimo li varijablu x sa svakim elementom univerzalnog skupa, tj. sa brojevima 1, 2, 3, 4, dobivamo:

za $x = 1$: $2.1 > 4$ (LAŽ)
za $x = 2$: $2.2 > 4$ (LAŽ)
za $x = 3$: $2.3 > 4$ (ISTINA)
za $x = 4$: $2.4 > 4$ (ISTINA)

Vidimo da izjavna funkcija postaje $2x > 4$ postaje istinita izjava ako varijablu x zamijenimo brojem 3 ili brojem 4. Skup $\{3, 4\}$ naziva se skup istinitosti izjavne funkcije $2x > 4$.

Uzmemo li izjavnu funkciju $2x > 4$ nad skupom $U = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, onda skup istinitosti glasi: $\{3, 4, 5, 6\}$.

Zadan je univerzalni skup $U = \{0, 1, 3\}$ i izjavna funkcija $x(x-3) = 0$ nad skupom U.

Kako glasi skup istinitosti te izjavne funkcije ?

9 ———

$\{0, 3\}$

lo ———

Dajemo definiciju. Skup istinitosti zadane izjavne funkcije nad skupom U je skup svih onih elemenata iz skupa U koji stavljeni namjesto varijable u zadanu izjavnu funkciju pretvaraju ovu u istinitu izjavu (sud).

Neka je zadana izjavna funkcija $x^2 = 1$ nad skupom $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Kako glasi skup istinitosti te izjavne funkcije?

lo

$\{1\}$

11

$\{1, 2, 3\}$

11

Uzmimo izjavnu funkciju

$$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$$

i univerzalni skup $U = \{1, 2, 3, 4\}$.

Kako glasi skup istinitosti te izjavne funkcije ?

- - . - -

KR

1.

2.

3.

4.

5.

ATKI PREGLED PARAGRAFA 12

Naučili smo slijedeće definicije:

1. Izjava (sud) je smislena rečenica koja nešto tvrdi i za koju možemo jednosmisleno kazati je li istinita ili lažna.

2. Univerzalni skup za neko promatranje je onaj skup čiji su elementi od interesa za to promatranje, dok elementi izvan tog skupa nisu od interesa za to promatranje i ne uzimaju se u obzir.

3. Varijabla je svaki simbol koji možemo zamijeniti bilo kojim elementom univerzalnog skupa.

4. Izjavna (sudovna) funkcija nad skupom U (univerzalnim skupom) je rečenica koja sadrži varijablu i koja postaje izjava (sud) kad varijablu zamjenjujemo bilo kojim elementom skupa U.

5. Skup istinitosti zadane izjavne funkcije nad skupom U je skup svih onih elemenata iz skupa U koji, stavljeni umjesto varijable u zadanu izjavnu funkciju, pretvaraju tu izjavnu funkciju u istinitu izjavu.

-- . --

XII ISPIT ZNANJA

1. Koje su od slijedećih rečenica izjave, a koje izjavne funkcije ?

   a) $5t - 4 = 0$
   b) $5 < 7$
   c) $8 = 0$
   d) $4x - 3 = 0$

2. U izjavnoj funkciji $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ zamijeni varijablu x elementima univerzalnog skupa $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.
   Za koje elemente univerzalnog skupa ta izjavna funkcija postaje istinita izjava?

3. Nađi skup istinitosti izjavne funkcije $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$, ako je univerzalni skup $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

4. Nađi skup istinitosti izjavne funkcije $2x > 7$, ako je univerzalni skup $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

5. Nađi skup istinitosti izjavne funkcije $x(x+1)(x+2)(x+3) = 0$, ako je univerzalni skup $U = \{-1, -2, -3, 0, 1, 2\}$.

6. Nađi skup istinitosti izjavne funkcije $x(x-1)(x-2) = 0$, ako je univerzalni skup $U = \{-1, 3, 4, 5\}$.

– – . – –

ODGOVORI NA XII ISPIT ZNANJA

1. Izjave: b), c);
   Izjavne funkcije: a), d).

2. 0, 1, 2, 3.

3. $\{0, 1, 2, 3\}$.

4. $\{8\}$.

5. $\{-3, -2, -1, 0\}$.

6. $\emptyset$.

- - o - -

Paragraf 13

JEDNADŽBE I IDENTITETI

1

Svaka izjavna funkcija nad skupom U, koja sadrži znak jednakosti, zove se jednadžba nad skupom U, a skup istinitosti te izjavne funkcije zove se skup rješenja te jednadžbe. Svaki element skupa rješenja zove se korijen ili rješenje jednadžbe u skupu U. Riješiti jednadžbu znači naći njezin skup rješenja, tj. sve njezine korijene u skupu U. Ako je skup rješenja jednadžbe prazan skup, kažemo da je jednadžba nerješiva.

Izjavna funkcija $x(x-1)(x-3) = 0$ nad skupom $U = \{0, 1, 2\}$ sadrži znak jednakosti te je prema našoj definiciji jednadžba.

Nađi skup rješenja te jednadžbe !

1

$\{0, 1\}$

2

Izjavna funkcija $x^2 = 1$ nad skupom $U = \{-1, 0, 1, 2\}$ sadrži znak jednakosti te je prema tome jednadžba. Skup rješenja te jednadžbe je $\{-1, 1\}$.

Izražavamo se još na slijedeći način:

Rješenja jednadžbe $x^2 = 1$ u skupu

$U = \{-1, 0, 1, 2\}$ iznose $x = -1$ i $x = 1$.

Nađi rješenja jednadžbe

$x(x+1)(x-1)(x-2) = 0$ u skupu:

a) $U = \{1, 2, 3\}$

b) $U = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $U = \{-1, 0, 1, 2, 5\}$

d) $U = \{4, 5, 6\}$.

2 ---

a) 1, 2
b) 0, 1, 2
c) -1, 0, 1, 2
d) nema rješenja

3 ---

Jednadžba $x + 3 = -5$ nema rješenje u skupu prirodnih brojeva N, ali zato ima rješenje u skupu cijelih brojeva D; ono iznosi $x = -8$.

Koje od donjih jednadžbi nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva?

a) $x - 3 = -1$
b) $2x = -7$
c) $\frac{x}{2} = 3$
d) $\frac{1}{x} = 4$

3 ---

b), d)

4 ---

Potraži rješenja jednadžbi:
$(x-1)(x-2) = 0$ i $(2x-2)(3x-6)(x-3) = 0$
u skupu $U = \{0, 1, 2, 4, 5\}$

4

Rješenja prve jednadžbe:
1, 2

Rješenja druge jednadžbe:
1, 2

5

Vidjeli smo da su skupovi rješenja jednadžbi iz prethodnog članka jednaki tj. svako rješenje prve jednadžbe ujedno je rješenje i druge jednadžbe, i obrnuto, svako rješenje druge jednadžbe ujedno je rješenje i prve jednadžbe. Naravno da smo pri tome i kod jedne i kod druge jednadžbe promatrali samo rješenja u jednom te istom skupu $U = \{0,1,2,4,5\}$ Kažemo da su te dvije jednadžbe ekvivalentne nad skupom $U = \{0,1,2,4,5\}$

Zašto jednadžbe $(x-1)(x-2) = 0$
i $(2x-2)(3x-6)(x-3) = 0$
nisu ekvivalentne nad skupom
$U = \{1,2,3,4\}$

5

Skupovi rješenja glase: $\{1, 2\}$, $\{1, 2, 3\}$. Ti **skupovi su različiti** pa jednadžbe **nisu ekvivalentne** nad skupom U.

6

Definicija. Kažemo da su dvije jednadžbe nad skupom U ekvivalentne ako su im skupovi rješenja jednaki, tj. ako je svako rješenje prve jednadžbe ujedno i rješenje druge jednadžbe, i obrnuto, ako je svako rješenje druge jednadžbe ujedno i rješenje prve jednadžbe.

Koje su od slijedećih jednadžbi nad skupom $U = \{0, 1, 2, 4\}$ ekvivalentne

a) $x(x-1) = 0$

b) $x(x-1)(x-2) = 0$

c) $x(x-1)(x-5) = 0$

d) $x(x-4) = 0$

6

a) i c)

7

Ako je skup U konačan pa ako još ima mali broj elemenata, onda svaku jednadžbu nad skupom U možemo jednostavno riješiti, kako smo to vidjeli iz prijašnjih primjera. Naprosto se u pripadnu sudovnu funkciju mjesto varijable stave redom elementi skupa U pa se vidi koji su to elementi korijeni (rješenja) naše jednadžbe. Međutim, ako je skup U beskonačan, onda je nemoguće na taj način naći rješenja. Da bismo i takve jednadžbe riješili, poslužit ćemo se poučcima o ekvivalentnosti jednadžbi.

Želimo li riješiti zadanu jednadžbu, dovoljno je riješiti bilo koju jednadžbu koja je ekvivalentna zadanoj, jer sve ekvivalentne jednadžbe imaju iste skupove rješenja. Zato prilikom rješavanja neke jednadžbe potražimo najjednostavniju jednadžbu koja je ekvivalentna zadanoj, i onda rješavamo tu jednadžbu, a da bismo takvu jednadžbu mogli naći treba da znamo poučke o ekvivalentnosti jednadžbi.

Prelazimo na poučke o ekvivalentnosti jednadžbi (bez dokaza). Radi lakšeg izražavanja promatrat ćemo jednadžbe nad skupom R, tj. nad skupom svih realnih brojeva.

7

8

Poučak. Ako lijevoj i desnoj strani zadane jednadžbe varijable x dodamo jedan te isti izraz $t(x) \in R$ za svaki $x \in R$), dobit ćemo jednadžbu koja je ekvivalentna zadanoj.

Isti poučak vrijedi ako lijevoj i desnoj strani zadane jednadžbe dodamo jedan te isti realan broj.

Riješi jednadžbu:

$$-2x = -3x + 4$$

tako da lijevoj i desnoj strani dodaš jedan te isti broj.

8

$$(-2x)+3x = (-3x+4)+3x$$

$$x = 4$$

9

Kako oduzeti neki broj (izraz) znači dodati suprotni broj (izraz), to će poučak u prethodnom članku ostati na snazi ako riječ "dodamo" zamijenimo s riječi "oduzmemo".

Riješi jednadžbu:

$$6x = 5x-1$$

tako da od lijeve i desne strane oduzmeš jedan te isti izraz.

9

$6x - 5x = (5x-1) - 5x$

$x = -1$

lo

Uzmimo jednadžbu

$$2x + 3 = -6x + 4 \qquad (I)$$

Ako lijevoj i desnoj strani te jednadžbe dodamo $6x$, dobivamo ekvivalentnu jednadžbu:

$$2x+6x+3 = -6x+4+6x \quad \text{ili}$$

$$2x + 6x + 3 = 4 \qquad (II)$$

Usporedimo li jednadžbe I i II vidimo da smo drugu jednadžbu dobili iz prve tako da smo u prvoj jednadžbi člana $-6x$ promijenili predznak i prebacili ga na suprotnu stranu.

Vrijedi općenito. Svaki član jednadžbe možemo prebaciti na suprotnu stranu jednadžbe s time da mu promijenimo predznak. Tim postupkom opet smo dobili ekvivalentnu jednadžbu.

Riješi jednadžbu

$$5x = 3x + 4 - 2x$$

tako da neke članove prebaciš iz jedne na drugu stranu.

lo

$5x - 3x + 2x = 4$

$4x = 4$

$x = 1$

11

<u>Poučak</u>. Ako lijevu i desnu stranu jednadžbe pomnožimo bilo kojim realnim brojem, različitim od nule, dobijemo ekvivalentnu jednadžbu.

Riješi svaku od jednadžbi:

a) $5x = 10$

b) $\frac{1}{2}x = \frac{3}{2}$

c) $-\frac{2}{3}x = \frac{1}{6}$

tako da je svedeš na ekvivalentnu množenjem lijeve i desne strane jednim te istim brojem.

12

a) $(5x)\cdot\frac{1}{5} = 10\cdot\frac{1}{5}$

$x = \frac{10}{5} = 2$

b) $(\frac{1}{2}x)\cdot 2 = \frac{3}{2}\cdot 2$

$x = 3$

c) $(-\frac{2}{3}x)\cdot(-\frac{3}{2}) = \frac{1}{6}\cdot(-\frac{3}{2})$

$x = -\frac{1}{4}$

Kako se dijeljenje nekim brojem svodi na množenje recipročnom vrijednošću tog broja, vrijedit će također slijedeći poučak.

Ako lijevu i desnu stranu jednadžbe podijelimo bilo kojim realnim brojem različitim od nule, dobijemo ekvivalentnu jednadžbu.

Riješi svaku od jednadžbi

a) $-\frac{1}{x}x = 5$

b) $\frac{2}{3}x = 8$

c) $\frac{x}{5} = -\frac{1}{8}$

tako da je svedeš na ekvivalentnu dijeljenjem lijeve i desne strane jednim te istim brojem.

12

a) $(-\frac{1}{2}x):(-\frac{1}{2}) = 5:(-\frac{1}{2})$

$x = (-5.\frac{2}{1})$

$x = -10$

b) $(\frac{2}{3}x):\frac{2}{3} = 8:\frac{2}{3}$

$x = 12$

c) $\frac{x}{5}:\frac{1}{5} = -\frac{1}{8}:\frac{1}{5}$

$x = -\frac{1}{8}.\frac{5}{1}$

$x = -\frac{5}{8}$

13

Definicija. Jednadžba nad skupom U zove se identitet nad skupom U ako je svaki element skupa U rješenje te jednadžbe.

Jednadžba

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

nad skupom U = 1,2,3 je identitet nad tim skupom, jer je svaki element toga skupa rješenje te jednadžbe, tj. skup rješenja te jednadžbe jednak je skupu U.

Jednadžba

$(x-1)(x-2)(x-3) = 0$

nad skupom $U = \{1,2,3,4\}$ nije identitet nad tim skupom, jer $x = 4$ nije rješenje te jednadžbe.

Zadana je jednadžba:

$x(x+1)(x-1) = 0$ nad skupom $U = \{-1,0,1\}$. Je li ta jednadžba identitet nad skupom U ?

13

Da, jer je skup rješenja jednak skupu U.

14

Nad kojim je skupovima jednadžba $x(x-1)(x-2)(x-3) = 0$ identitet ?

a) $\{1,2,3\}$ b) $\{0,1,2,3\}$

c) $\{-1,0,2,3\}$ d) $\{0,2\}$

4

a), b), d).

5

b) i c)

$1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

nije identitet nad skupom R, jer za $x = 0$ dobivamo $1 + \frac{1}{0} = \frac{0+1}{0}$ što je pogrešno jer dijeljenje nulom nije definirano.

6

rješenja

15

Jednadžba

$3x - x + 5x = 7x$

nad skupom realnih brojeva je identitet nad tim skupom jer zamijenimo li x bilo kojim realnim brojem, uvijek ćemo dobiti istinitu izjavu.

Koje su od slijedećih jednadžbi identiteti nad skupom realnih brojeva

a) $5x - 8 = 0$

b) $(x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$

c) $5x - 6x = -x$

d) $1 + \frac{1}{x} = \frac{x+1}{x}$

16

Ponovimo.

Jednadžba nad skupom U, kojoj je skup rješenja jednak skupu U, zove se identitet nad skupom U.

Identitet nad skupom U je svaka jednadžba nad skupom U kojoj je skup ______________ jednak skupu U.

KRATKI PREGLED PARAGRAFA 13

U ovom paragrafu naučili smo slijedeće definicije i poučke:

Definicije.

1. Jednadžba je svaka ona izjavna funkcija nad skupom U koja sadrži znak " = "; skup istinitosti te izjavne funkcije zove se skup rješenja jednadžbe, a svaki element toga skupa zove se rješenje ili korijen jednadžbe (rješenje ili korijen u skupu U). Riješiti jednadžbu znači njezin skup rješenja tj. naći sve njene korijene u skupu U. Slovo koje označuje varijablu u sudovnoj funkciji zove se varijabla jednadžbe. Ako je skup rješenja jednadžbe prazan skup, kažemo da je jednadžba nerješiva.

2. Jednadžbe koje imaju jednake skupove rješenja zovu se ekvivalentne jednadžbe.

3. Jednadžba nad skupom U zove se identitet nad skupom U, ako je svaki element skupa U rješenje te jednadžbe.

Poučci.

1. Ako lijevoj i desnoj strani zadane jednadžbe dodamo (oduzmemo) jedan te isti izraz koji sadrži varijablu jednadžbe i koji postaje određeni broj ako tu varijablu zamijenimo bilo kojim realnim brojem, dobit ćemo ekvivalentnu jednadžbu. Isto ćemo tako dobiti ekvivalentnu jednadžbu ako lijevoj i desnoj strani zadane jednadžbe dodamo (oduzmemo) jedan te isti broj.

Kao posljedica prethodnog poučka izlazi da možemo svaki član jednadžbe prebaciti na suprotnu stranu s time da mu promijenimo predznak.

2. Ako lijevu i desnu stranu zadane jednadžbe pomnožimo (podijelimo) jednim te istim realnim brojem, različitim od nule, dobit ćemo ekvivalentnu jednadžbu.

3. U svrhu rješavanja neke jednadžbe uvijek ovu možemo zamijeniti ekvivalentnom jednadžbom.

- - . - -

XIII ISPIT ZNANJA

1. Nađi rješenja jednadžbe $x(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{3})(x-1) = 0$ u skupu:
a) $\left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$, b) $\left\{2, 3, 4, 5\right\}$, c) D (skup svih cijelih brojeva), d) R (skup svih racionalnih brojeva)

2. Koje od slijedećih jednadžbi nemaju rješenja u skupu cijelih brojeva: a) $-2x = 3$, b) $3x = -6$, c) $\frac{1}{x} = 2$, d) $2x = 0$.

3. Koje od slijedećih jednadžbi nemaju rješenja u skupu realnih brojeva: a) $x^2 = -1$, b) $x^2 = 5$, c) $\frac{5}{x} = 0$, d) $-2x = 4$.

4. Koje su od slijedećih jednadžbi ekvivalentne nad skupom $U = \left\{-1, 0, 1, 2, 3\right\}$: a) $(x+1)(x-1)(x-2) = 0$,
b) $x(x+1)(x-1)(x-2) = 0$, c) $(x+1)(x-1)(x-2)(x-5) = 0$,
d) $(x-1)x(x-3) = 0$.

5. Nađi barem jedan skup nad kojim su ekvivalentne slijedeće tri jednadžbe: a) $x(x-1)(x+2) = 0$, b) $x(x-1)(x+2)(x-3) = 0$,
c) $(x-1)(x+2) = 0$.

6. Riješi slijedeće jednadžbe tako da lijevoj i desnoj strani dodaš jedan te isti broj (izraz):
a) $x - 4 = 5$, b) $\frac{1}{2}x = -\frac{1}{x} + 4$, c) $3x = 2x - 5$.

7. Riješi slijedeće jednadžbe tako da od lijeve i desne strane oduzmeš jedan te isti broj izraz:
a) $x - 5 = 4$, b) $-2x = -3x + 8$, c) $t + 8 = -\frac{1}{2}$.

8. Riješi slijedeće jednadžbe tako da neke članove prebaciš iz jedne na drugu stranu:
a) $\frac{1}{2}x + 4 = -\frac{3}{2}x - 3$, b) $-x + 8 = -2x$, c) $-\frac{5}{7}x - 4 = -\frac{12}{7}x + \frac{1}{3}$.

9. Riješi svaku od jednadžbi: a) $\frac{1}{3}x = 5$, b) $-\frac{2}{5}x = 8$, c) $7 = -\frac{x}{4}$

tako da je svedeš na ekvivalentnu množenjem lijeve i desne strane jednim te istim brojem.

10. Riješi svaku od jednadžbi: a) $-\frac{2}{3}x = 5$, b) $-3 = \frac{1}{x}$, c) $-\frac{5}{7} = -\frac{7}{4}x$

tako da je svedeš na ekvivalentnu dijeljenjem lijeve i desne strane jednim te istim brojem.

11. Zadani su skupovi:

a) $\{0, -\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{3}\}$, b) $\{0, -1, -\frac{1}{3}\}$, c) $\{-\frac{1}{3}\}$,

d) $\{0, -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\}$, e) $\{0, 1, -1\}$.

Nad kojim je od tih skupova jednadžba $x(x-1)(x+\frac{1}{2})(x+\frac{1}{3}) = 0$ identitet ?

12. Koja je od slijedećih izjavnih funkcija identitet nad skupom cijelih brojeva:

a) $5x-x = 4x$, b) $2x - 4 = 0$, c) $(x+1)(x-1) = x^2 - 1$,

d) $\frac{2}{x} + 1 = \frac{2+x}{x}$.

- - . - -

ODGOVORI NA XIII ISPIT ZNANJA

1. a) $-\frac{1}{2}$, 0, $\frac{1}{2}$, 1; b) nema rješenja; c) 0, 1; d) 0, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$, 1.

2. a, c. 3. a, c. 4. a i c. 5. $\{1, -2\}$.

6. a) $(x-4) + 4 = 5+4$ i odavde $x = 9$,

b) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x = (-\frac{1}{2}x + 4) + \frac{1}{2}x$ i odavde $x = 4$,

c) $3x + (-2x) = (2x-5)+(-2x)$ i odavde $x = -5$.

7. a) $x-5-(-5) = 4-(-5)$ i odavde $x = 9$,

b) $-2x-(-3x) = -3x+8-(-3x)$ i odavde $x = 8$,

c) $(t+8)-8 = -\frac{1}{2} - 8$ i odavde $t = -\frac{17}{2}$.

8. a) $\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x = -3-4$ i odavde $2x = -7$ odnosno $x = \frac{-7}{2}$.

b) $-x+2x = -8$ i odavde $x = 8$. c) $-\frac{5}{7}x + \frac{12}{7}x = 4 + \frac{1}{3}$ i odavde $x = \frac{13}{3}$.

9. a) $(\frac{1}{3}x).3 = 5.3$ i odavde $x = 15$. b) $(-\frac{2}{5}x).(-\frac{5}{2}) = 8.(-\frac{5}{2})$ i odavde $x = -20$. c) $7.(-4) = (-\frac{x}{4})(-4)$ i odavde $x = -28$.

10. a) $(-\frac{2}{3}x):(-\frac{2}{3}) = 5:(-\frac{2}{3})$ i odavde $x = \frac{15}{2}$, b) $(-3):\frac{1}{2} = (\frac{1}{2}x):\frac{1}{2}$ i odavde $x = -6$, c) $(-\frac{5}{7}):(-\frac{7}{4}) = (-\frac{7}{4}x):(-\frac{7}{4})$ i odavde $x = \frac{20}{49}$.

11. a, c.

12. a, c; $\frac{2}{x} + 1 = \frac{2+x}{x}$ nije identitet jer za $x = 0$ dobivamo $\frac{2}{0} + 1 = \frac{2+0}{0}$, a to je neispravno jer dijeljenje nulom nije definirano.

- - o - -

Paragraf 14

RJEŠAVANJE LINEARNIH JEDNADŽBI

1 ---

Želimo li riješiti zadanu jednadžbu, tada ćemo poučkom o ekvivalentnosti jednadžbi naći jednadžbu koja ima najjednostavniji oblik i koja je ekvivalentna zadanoj jednadžbi. Rješenja tako dobivene jednadžbe bit će i rješenja zadane jednadžbe.

Svaka jednadžba koju se pomoću poučka o ekvivalentnosti jednadžbi dade svesti na oblik

$$ax = b$$

gdje su a i b realni brojevi, zove se linearna jednadžba.

Koje se od slijedećih jednadžbi linearne?

a) $5x^2 = 8$ b) $4x = 0$

c) $0 \cdot x = 3$ d) $2x^3 = 8$

1 ---

b, c

2 ---

Da bismo za neku linearnu jednadžbu našli njen ekvivalentni oblik $ax = b$, $(a \in R,\ b \in R)$, najjednostavnije je izvršiti slijedeće radnje:

1. Korak. Ako u jednadžbi dolaze zagrade, riješimo se zagrada.

2. Korak. Ako u jednadžbi dolaze razlomci, riješimo se razlomaka tako da lijevu i desnu stranu jednadžbe pomnožimo najmanjim zajedničkim nazivnikom.

3. Korak. Sve članove jednadžbe koji sadrže nepoznanicu prebacimo na lijevu stranu.

4. Korak. Izvršimo redukciju članova na lijevoj i desnoj strani.

2

3

Neka je zadana jednadžba:

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{3}(x+4) = 1 - \frac{1}{3}(x-2)$$

Treba tu jednadžbu svesti na oblik

$$ax = b$$

1 Korak: treba se riješiti zagrada.

Učini taj prvi korak !

3

$$\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

4

Ako si ispravno radio, dobio si slijedeću jednadžbu

$$\frac{x}{2} - 1 + \frac{1}{6}x + \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$$

2. Korak: treba se riješiti razlomka

Riješi se razlomka

4

$3x - 6 + x + 4 =$
$= 6 - 2x + 4$

5

Ako nisi nigdje pogriješio, dobio si slijedeću jednadžbu:

$3x - 6 + x + 4 = 6 - 2x + 4$

3. Korak: sve članove koji sadrže varijablu treba prebaciti na lijevu stranu, a ostale članove na desnu stranu.

Učini to !

5

$3x + x + 2x =$
$= 6 - 4 + 6 + 4$

6

Ako si ispravno radio, dobio si slijedeću jednadžbu:

$3x + x + 2x = 6 - 4 + 6 + 4$

4. Korak: treba izvršiti redukciju članova na lijevoj i desnoj strani.

Izvrši traženu redukciju !

6

$6x = 12$

7

Ako si ispravno radio, dobio si jednadžbu:

$$6x = 12$$

koja je ekvivalentna zadanoj jednadžbi i ima oblik $ax = b$.

Njeno rješenje iznosi $x = 2$

7 ———

8 ———

Ako u polaznoj jednadžbi, tj. u jednadžbi

$$\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\left[2 - \frac{1}{3}(x+4)\right] = 1 - \frac{1}{3}(x-2)$$

varijablu x zamijenimo brojem 2, dobit ćemo jednakost (istinitu izjavu)

Učini to !

8 ———

$$\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\left[2-\frac{1}{3}(2+4)\right] = 1-\frac{1}{3}(2-2)$$

$$1-\frac{1}{2}\left[2-2\right] = 1-\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$1-\frac{1}{2}\cdot 0 = 1-\frac{1}{3}\cdot 0$$

$$1 = 1$$

9 ———

Riješi slijedeće jednadžbe:

a) $2x - \left[11+2x-(5x+7)\right] = x - 8$

b) $2x-3-3\left\{2x-3\left[2x-3(2x-3)\right]\right\} = -2$

c) $\frac{x+1}{4} - \left(\frac{4x-5}{18}-\frac{2x-1}{6}\right) = 2- \frac{7(x-3)}{36}$

d) $\frac{x}{2}+\left\{\frac{x}{3}-\frac{1}{5}\left[\frac{x}{4}-\frac{1}{7}\left(\frac{x}{6}-3\right)\right]\right\} = \frac{1}{7}\left(5x + \frac{3x-8}{5}\right)$

9 ———

a) $x = -1$
b) $x = 2$
c) $x = 4$
d) $x = 12$

1o ———

Često nailazimo na jednadžbe gdje se pojavljuju razlomci čiji nazivnici sadrže varijablu. Da bismo riješili takve razlomke, sjetimo se ove činjenice: Ako su $\frac{a}{c}$ i $\frac{b}{c}$ dva razlomka sa jednakim nazivnicima, onda je $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$, onda i samo onda ako je $a = b$.

Primjer:

$$\frac{2}{3t} = \frac{3}{4}$$

Svedemo li oba razlomka na zajedničke nazivnike, dobivamo:

$$\frac{8}{12t} = \frac{9t}{12}$$

i odavde

$$8 = 9t$$

$$t = \frac{8}{9}$$

Riješi jednadžbe:

a) $\frac{7}{6t} = \frac{0,3}{0,7}$

b) $\frac{1}{0,2t} = 0,5$

c) $\frac{0,2}{t} = \frac{1}{3}$

10

---

a) $\frac{7 \cdot 0,7}{6t \cdot 0,7} = \frac{0,3 \cdot 6t}{6t \cdot 0,7} \longrightarrow$

$0,3 \cdot 6t = 7 \cdot 0,7 \longrightarrow$

$t = \frac{4,9}{1,8} = \frac{49}{18}$

b) $\frac{1}{0,2t} = \frac{0,5 \cdot 0,2t}{0,2t} \longrightarrow$

$0,5 \cdot 0,2t = 1 \longrightarrow$

$t = \frac{1}{0,5 \cdot 0,2} = \frac{1}{0,1} = 10$

c) $\frac{0,6}{3t} = \frac{t}{3t} \longrightarrow$

$t = 0,6$

11

Riješimo jednadžbu

$$\frac{0,7}{0,5} = \frac{3}{0,4t}$$

Svedemo li oba razlomka na zajednički nazivnik, dobivamo:

$$\frac{0,7 \cdot 0,4t}{0,5 \cdot 0,4t} = \frac{3 \cdot 0,5}{0,5 \cdot 0,4t}$$

Izjednačenje brojnika daje:

$$0,7 \cdot 0,4t = 3 \cdot 0,5$$

$$0,28t = 1,5$$

$$t = \frac{1,5}{0,28} = \frac{150}{28} = \frac{75}{14}$$

Riješi slijedeće jednadžbe:

a) $2 = \frac{1}{t}$

b) $0,6 = \frac{1}{0,3t}$

c) $0,5 = \frac{0,32}{t}$

d) $\frac{0,8}{0,o4} = \frac{\frac{2}{3}}{0,2t}$

11

a) $\frac{2t}{t} = \frac{1}{t} \Longrightarrow 2t = 1 \longrightarrow t = \frac{1}{2}$

b) $\frac{0,6.0,3t}{0,3t} = \frac{1}{0,3t} \longrightarrow$

$0,18t = 1 \longrightarrow t = \frac{1}{0,18} = \frac{5o}{9}$

c) $\frac{0,5t}{t} = \frac{0,32}{t} \longrightarrow$

$0,5t = 0,32 \longrightarrow$

$t = \frac{0,32}{0,5} = 0,64$

d) $\frac{0,8}{0,o4} = \frac{2}{0,6t} \longrightarrow$

$0,8.0,6t = 2.0,o4$

$t = \frac{0,o8}{0,48} = \frac{1}{6}$

12

Treba riješiti jednadžbu:

$\frac{0,2t}{3} = \frac{1}{t}$

u skupu pozitivnih brojeva.

Opet svedemo oba razlomka na zajednički nazivnik. Dobivamo:

$\frac{0,2t^2}{3t} = \frac{3}{3t}$

Izjednačenje brojnika daje:

$0,2t^2 = 3$

$t^2 = \frac{3}{0,2}$

$t^2 = 15$

$t = \sqrt{15}$

Riješi slijedeće jednadžbe u skupu pozitivnih brojeva:

a) $\frac{t}{3} = \frac{1}{t}$

b) $\frac{t}{0,7} = \frac{1}{0,2t}$

c) $\frac{0,4t}{3} = \frac{0,5}{0,1t}$

12

a) $\frac{t^2}{3t} = \frac{3}{3t} \Rightarrow t^2=3 \Rightarrow$

$t = 3$

b) $0,2t^2=0,7 \Rightarrow t=\sqrt{3,5}$

c) $0,04t^2=1,5 \Rightarrow t=\sqrt{37,5}$

13

a) $2t^2 = 3 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{3}{2}}$

b) $0,012t^2=0,24 \Rightarrow t = \sqrt{20}$

13

Riješimo jednadžbu

$$\frac{0,4}{0,5t} = \frac{t}{0,8}$$

u skupu pozitivnih brojeva.

Svedemo li oba razlomka na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\frac{0,4 \cdot 0,8}{0,5 \cdot 0,8t} = \frac{0,5t^2}{0,5 \cdot 0,8t}$$

Izjednačenjem brojnika dobivamo

$$0,4 \cdot 0,8 = 0,5t^2$$

$$0,32 = 0,5t^2$$

$$t^2 = \frac{0,32}{0,5} = \frac{32}{50} = \frac{16}{25}$$

$$t = \sqrt{\frac{16}{25}}$$

$$t = \frac{4}{5}$$

Riješi slijedeće jednadžbe u skupu pozitivnih brojeva:

a) $\frac{1}{t} = \frac{2t}{3}$

b) $\frac{0,8}{0,06t} = \frac{0,2t}{0,3}$

c) $\frac{1}{0,1t} = \frac{0,3t}{\frac{2}{3}}$

14

Riješimo jednadžbu

$$\frac{x-3}{x-2} = \frac{2x-5}{x-2}$$

Budući da razlomci imaju jednake naziv-

c) $0{,}03t^2 = \frac{2}{3} \longrightarrow t = \sqrt{\frac{200}{9}} \longrightarrow t = \frac{10}{3}\sqrt{2}$

14

Izjednačimo li brojnike, dobivamo:

$6x + 8 = 2x + 2$

i odavde $x = -\frac{3}{2}$.

Kako je za $x = -\frac{3}{2}$ zajednički nazivnik jednak nuli, jednadžba nema rješenja.

nike, izjednačimo brojnike.

Dobivamo:

$$x - 3 = 2x - 5$$

i odatle $x = 2$

Međutim, ako u polaznoj jednadžbi x zamijenimo brojem 2, dobivamo

$$\frac{2-3}{2-2} = \frac{2.2-5}{2-2}$$ ili

$$\frac{-1}{0} = \frac{-1}{0}$$

što je pogrešno, jer dijeljenje nulom nije definirano. Prema tome broj 2 nije rješenje naše jednadžbe; jednadžba je nerješiva.

Da li jednadžba

$$\frac{6x + 8}{2x + 3} = \frac{2x + 2}{2x + 3}$$

ima rješenje u skupu realnih brojeva ?

15

Riješimo jednadžbu:

$$\frac{3}{x-1} + \frac{4}{x+1} = \frac{4x + 6}{(x-1)(x+1)}$$

Zajednički nazivnik je $(x-1)(x+1)$. Svedemo li lijevu i desnu stranu jednadžbe na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\frac{3(x+1) + 4(x-1)}{(x+1)(x-1)} = \frac{2x + 4}{(x+1)(x-1)}$$

Izjednačujući brojnik dobivamo:

$$3(x+1)+4(x-1) = 2x+4 \quad \text{i dalje}$$

$$3x + 3 + 4x - 4 = 2x + 4$$

$$3x + 4x - 2x = -3 + 4 + 4$$

$$5x = 5$$

$$x = 1$$

Je li $x = 1$ rješenje zadane jednadžbe ?

15 ——— 16 ———

Nije, jer je za $x = 1$ zajednički nazivnik jednak nuli.

Primjeri iz prethodna dva članka navode nas na slijedeći zaključak:

Ako je za dobivenu vrijednost varijable zajednički nazivnik jednak nuli, onda ta vrijednost nije rješenje zadane jednadžbe.

- - . - -

XIV ISPIT ZNANJA

1. Riješi jednadžbe:

a) $-x - \{2-(x+3)+[x-(2-x)]-1\} = 1$

b) $2 - \frac{5x+2}{3} = \frac{x}{2} - \frac{2(x+1)}{6}$

2. Riješi jednadžbe u skupu pozitivnih brojeva:

a) $\frac{8}{3t} = \frac{0,4}{0,02}$, b) $\frac{0,06}{0,005} = \frac{4}{3t}$,

c) $\frac{1,2t}{0,4} = \frac{2}{0,1t}$ d) $\frac{0,05}{3\,t} = \frac{t}{0,4}$

3. Riješi jednadžbe:

a) $\frac{15x+6}{3x-1} = \frac{6x-3}{3x-1}$,

b) $1 - \frac{1}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}$

c) $\frac{3}{x-1} - \frac{2}{x+1} = \frac{2x+4}{(x-1)(x+1)}$,

d) $\frac{0,4 + \frac{1}{3}}{0,6 - \frac{7}{2}} = \frac{2}{2,5}$

e) $\frac{2}{3} = \frac{0,2 + \frac{4}{5}}{0,4t - 1}$,

f) $\frac{13}{x-5} + \frac{3}{4} = \frac{32,5}{x-5}$

- - . - -

ODGOVORI NA XIV ISPIT ZNANJA

1. a) $x = \frac{3}{2}$, b) $x = \frac{10}{11}$

2. a) $t = -\frac{2}{15}$, b) $t = \frac{1}{9}$,

c) $t = \sqrt{\frac{20}{3}}$, d) $t = \frac{1}{\sqrt{150}}$

3. a) $x = -1$, b) nema rješenja,

c) nema rješenja, d) $t = -\frac{19}{30}$,

e) $t = 6,25$, f) $x = 31$.

- - o - -

Paragraf 15

JEDNADŽBE KOJE SADRŽE OPĆE BROJEVE

1. Jednadžbe koje sadrže, osim varijable, i neke druge opće brojeve koje ne smatramo varijablama, rješavaju se na isti način kao da se mjesto općih brojeva nalaze posebni brojevi. Međutim kad dođemo do faze da moramo reducirati članove koji sadrže varijablu, može se dogoditi da to ne možemo u potpunosti učiniti. U tom slučaju na osnovu zakona distribucije izlučimo varijablu ispred zagrade i jednadžbu podijelimo izrazom u zagradi.

Primjer. Treba riješiti jednadžbu:

$$ax - b = cx + dx + d$$

Prebacimo li članove koji sadrže varijablu na lijevu stranu, a sve ostale članove na desnu stranu, dobivamo:

$$ax - cx - dx = b + d$$

ili

$$x(a-c-d) = b + d$$ i odavde ako je $a - c - d \neq 0$,

$$x = \frac{b + d}{a - c - d}$$

2. Riješi slijedeće jednadžbe:

a) $2 = ax - bx + c$

b) $2a - x = 2cx + 4d$

c) $\frac{1}{2}ax + \frac{x}{3} = 1$

1

a) $x = \frac{2-c}{a-b}$ za $a+b$

b) $x = \frac{2a-4d}{1+2c}$ za $c \neq -\frac{1}{2}$

c) $x = \frac{6}{3a+2}$ za $a \neq -\frac{2}{3}$

2

Primjer: Treba riješiti jednadžbu

$$\frac{ac}{b} = \frac{2d}{bx}$$

Svedemo li obje strane jednadžbe na zajednički nazivnik, dobivamo

$$\frac{acx}{bx} = \frac{2d}{bx}$$

Izjednačenje brojnika daje:

$$acx = 2d$$

Odavde slijedi da je $x = \frac{2d}{ac}$

Riješi jednadžbe:

a) $\frac{ax}{cd} = b$

b) $bx = \frac{cde}{af}$

c) $\frac{a}{b} = \frac{Px}{7}$

d) $\frac{ab}{8} = \frac{QP}{dx}$

2

a) $x = \frac{bcd}{a}$

b) $x = \frac{cde}{abf}$

c) $x = \frac{7a}{Pb}$

d) $x = \frac{8QP}{abd}$

3

Primjer: Riješi jednadžbu

$\frac{P}{R} = \frac{4-S}{S-T}$, ako je varijabla slovo S

Svedemo li obje strane na zajednički nazivnik, dobivamo:

$$\frac{P(S-T)}{R(S-T)} = \frac{R(4-S)}{R(S-T)}$$

Izjednačenje brojnika daje:

$$P(S-T) = R(4-S)$$

i dalje

$$PS - PT = R4 - RS$$

$$PS + RS = PT + R4$$

$$S(P+R) = PT + R4$$

$$S = \frac{PT + R4}{P + R}$$

Riješi slijedeće jednadžbe:

a) $\frac{S - A}{A - R} = \frac{C}{S}$ (varijabla je A)

b) $\frac{C}{S} = \frac{R}{S-T}$ (varijabla je S)

c) $P = \frac{R - A}{R + A}$ (varijabla je R)

d) $R = \frac{4T + 1}{T + 4}$ (varijabla je T)

3 ---

a) $A = \frac{CR + S^2}{S + C}$

b) $S = \frac{CT}{C - R}$

c) $R = \frac{A(P+1)}{1 - P}$

d) $T = \frac{1 - RL}{R - L}$

-- . --

XV ISPIT ZNANJA

1. Riješi jednadžbe:

   a) $3ax + 5a = abx + 4$,

   b) $\frac{ab}{c} = \frac{5d}{ex}$,

   c) $a = \frac{Rx}{3}$

   d) $\frac{ax}{3b} = d$

2. Riješi jednadžbe:

   a) $\frac{R - S}{A - S} = \frac{C}{D}$ (varijabla je S)

   b) $\frac{C}{A} = \frac{R}{T - A}$ (varijabla je A)

   c) $P = \frac{2S - A}{A - S}$ (varijabla je S)

- - . - -

ODGOVORI NA XV ISPIT ZNANJA

1. a) $x \frac{4 - 5a}{a\,(3-b)}$ za $a(3-b) \neq 0$,

b) $x = \frac{5cd}{abe}$ za $abe \neq 0$,

c) $x = \frac{3a}{R}$ za $R \neq 0$,

d) $x = \frac{3bd}{a}$ za $a \neq 0$

2. a) $S = \frac{AC - DR}{C - D}$ za $C - D \neq 0$,

b) $A = \frac{CT}{C + R}$ za $C + R \neq 0$,

c) $S = \frac{A(1+P)}{P + 2}$.

- - o - -

LITERATURA

1. KARL ALENDORFER I KLITAS OKLI:

PRINCIPI MATEMATIKE

(II izdanje)

Vuk Karadžić, Beograd 1966

2. AA СТОЛЯR

ПЕДАГОГИКА MATEMSTIKИ

MINCK 1969

- - - o - - -

ZBIRKA ZADATAKA

RAČUNSKE OPERACIJE SA REALNIM BROJEVIMA

I - Ako u izrazu dolaze samo računske operacije istoga stupnja, onda se one izvode istim redoslijedom kako su naznačene.

Operacije prvog stupnja su: zbrajanje i oduzimanje.
Operacije drugog stupnja su: množenje i dijeljenje.
Operacije trećeg stupnja su: potenciranje i korijenovanje.
Npr.:

1) $1{,}2 - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{12}{10} - \frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{24-8+5}{20} = \frac{29-8}{20} = \underline{\frac{21}{20}}$

2) a) $18 : 3 \cdot 5 = 6 \cdot 5 = \underline{30}$

b) $0{,}4 \cdot 0{,}5 : 0{,}04 = 0{,}2 : 0{,}04 = \underline{5}$

c) $0{,}12 : 0{,}3 : 0{,}08 = 0{,}4 : 0{,}08 = \underline{5}$

d) $1{,}2 \cdot 1\frac{1}{4} : 3{,}2 = \frac{6}{5} \cdot \frac{5}{4} : \frac{16}{5} = \frac{6}{4} \cdot \frac{5}{16} = \underline{\frac{15}{32}}$

3) a) $-(-\frac{1}{2})^2 = \underline{-\frac{1}{4}}$

b) $-(-0{,}2)^3 = -(-0{,}008) = \underline{0{,}008}$

c) $\left[(-1)^3\right]^5 = (-1)^{15} = \underline{-1}$

d) $\left[(-1)^5\right]^4 = (-1)^{20} = \underline{1}$

4) a) $\sqrt{1\frac{9}{16}} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \underline{\frac{5}{4}}$

c) $\sqrt{0{,}0009} = \underline{0{,}03}$

b) $\sqrt{90000} = \underline{300}$

d) $\sqrt[3]{0{,}027} = \underline{0{,}3}$

II - Ako u izrazu dolaze sve računske operacije, onda se najprije izvode računske operacije trećeg stupnja, zatim računske operacije drugog stupnja, a tek onda računske operacije prvog stupnja.

Npr.:

1) $4 \cdot \sqrt{81} - 10^2 : \sqrt{25} = 4 \cdot 9 - 100 : 5 = 36 - 20 = \underline{16}$

2) $0,5^2 \cdot \sqrt{0,0009} + 1,5^2 : \sqrt{0,25} = 0,25 \cdot 0,03 + 2,25 : 0,5 =$

$= 0,0075 + 4,5 = \underline{4,5075}$

3) $\frac{3}{4} \cdot (\frac{2}{3})^3 + (\frac{2}{5})^2 \cdot (2\frac{1}{2})^2 + 4 : (\frac{2}{3})^2 = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{27} + \frac{4}{25} \cdot \frac{25}{4} + 4 : \frac{4}{9} =$

$= \frac{2}{9} + 1 + 9 = \underline{10\frac{2}{9}}$

4) $0,5^2 \cdot (\frac{2}{5})^2 \sqrt{1+(\frac{3}{4})^2} + \sqrt{1-(\frac{3}{5})^2} = 0,25 \cdot \frac{4}{25} \sqrt{1+\frac{9}{16}} + \sqrt{1-\frac{9}{16}} =$

$= 0,04 \cdot \frac{5}{4} + \frac{4}{5} = 0,05 + 0,8 = \underline{0,85}$

Izračunaj:

5) $0,5^2 : 0,2^3 + 2 \cdot 0,1^2 - 0,5 : 5^2$ (R: 3,125)

6) $2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{5} - 1\frac{1}{3} : 4 - \frac{29}{30} - (-0,5)^3 =$ (R: 1,125)

7) $\dfrac{0,4^3 \cdot 0,008 \cdot \sqrt{\dfrac{0,0192}{0,0003}}}{0,2^5 \cdot 0,02^2} : \dfrac{36^2 \cdot 0,25 - \dfrac{31 \cdot 0,2}{0,05}}{6,25 \cdot 0,16 - 0,975}$ (R: 4)

./.

III - Svaki drugi redoslijed kojim treba da se operacije izvode naznačuje se zagradama.

Npr.:

1) $\left[6 : (4 \cdot 5^2 - 7 \cdot 13 - 2^3)\right]^2 = \left[6 : (4 \cdot 25 - 7 \cdot 13 - 8)\right]^2 =$

$= \left[6 : (100-91-8)\right]^2 = \left[6 : 1\right]^2 = 6^2 = \underline{36}$

2) $\sqrt{2^2 \cdot (0,7-0,2) - 0,2^2} = \sqrt{4 \cdot 0,5 - 0,04} = \sqrt{2 - 0,04} =$

$= \sqrt{1,96} = \underline{1,4}$

3) $3\frac{3}{4} \cdot \left\{2\frac{2}{3} \cdot \left[(\frac{3}{5})^2 + (\frac{4}{5})^2\right]\right\} = \frac{15}{4} \cdot \left\{\frac{8}{3} \cdot 1\right\} = \frac{15}{4} \cdot \frac{8}{3} = \underline{10}$

4) $0,3 + \sqrt{(\frac{1}{5})^2 + (\frac{1}{5} + \frac{1}{10})^2 + \left[\frac{8}{15} - (\frac{2}{15} - \frac{1}{10}) + \frac{1}{10}\right]^2} =$

$= 0,3 + \sqrt{(\frac{1}{5})^2 + (\frac{3}{10})^2 + (\frac{3}{5})^2} = 0,3 + \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{9}{100} + \frac{9}{25}} =$

$= 0,3 + \sqrt{\frac{49}{100}} = 0,3 + \frac{7}{10} = \underline{1}$

Izračunaj:

5) $2 - 3 \cdot (0,05 : 0,25 + 12 \cdot 0,015) =$ (R: 0,86)

6) $2,4 \cdot 1,55 - 1,6 \cdot (2,5^2 : 20 - 0,12 \cdot 1,75)^2 =$ (R: 3,70319)

7) $\sqrt{3,73 - 2 \cdot \left\{1,4 - 0,7 \cdot \left[6,2 - (4,2+1,2) : 0,9\right]\right\}} =$ (R: 1,1)

8) $\left[(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) \cdot 5 + \frac{1}{8} : (1-0,4)\right] \cdot 1\frac{3}{4} +$

$+ (3,25 - \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{2}) : \frac{2}{3} =$ (R: $11\frac{25}{48}$)

9) $\dfrac{\left[(\frac{3}{7})^3 \cdot (-\frac{3}{7})^4\right]^6}{\left[(\frac{3}{7})^4 \cdot (-\frac{3}{7})^2\right]^7} : \dfrac{(-\frac{1}{3}+\frac{2}{5})^3 \cdot (\frac{9}{16}-\frac{1}{4})}{(-\frac{3}{4}+\frac{1}{2})^2 \cdot (\frac{1}{9}-\frac{4}{15}+\frac{4}{25})} =$ (R: 3)

10) $\left[(-\frac{1}{2})^3 - 3\cdot(-\frac{1}{2})^2\cdot 2 + 3\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 2^2 - 2^3\right] : \left[-\frac{1}{2} - 2\right]^3 =$ (R: 1)

11) $\dfrac{2 : 0{,}8 - 0{,}18 : (0{,}36 : 1{,}2)}{0{,}24 \cdot 8 + 0{,}08 - (4{,}2 - 2{,}78) + 18{,}42} =$ (R: $\frac{1}{10}$)

12) $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} + 0{,}228 : \left[(1{,}5291 - \dfrac{14{,}53\,662}{3 - 0{,}095}\cdot 0{,}305) : 0{,}12\right] =$

(R: 10)

13) $\dfrac{0{,}01^2 \cdot 0{,}2}{0{,}002 : 0{,}1^2} : \dfrac{0{,}1 : 0{,}001}{0{,}1 \cdot 100} =$ (R: 0,0001)

14) $\dfrac{(2{,}1-1{,}965):(1{,}2 \cdot 0{,}045)}{0{,}00325 : 0{,}013} - \dfrac{1 : 0{,}25}{1{,}6 \cdot 0{,}625} =$ (R: 6)

15) $\dfrac{(3 - \frac{7}{5})\cdot(\frac{1}{4})^2}{10 - \frac{19}{3}} : \dfrac{2\cdot(\frac{8}{3} - \frac{9}{4})}{1 + \frac{3}{3}} =$ (R: $\frac{3}{25}$)

16) $\dfrac{1 + \frac{3}{7}}{1 - \frac{1}{3 - \frac{2}{3}}} + \dfrac{1 + \frac{2}{7}}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}}} - \dfrac{1 + \frac{1}{2 + \frac{2}{7}}}{6 + \frac{15}{32}} - (1 + \dfrac{1}{1 + \frac{1}{5}}) =$ (R: 1)

17) Izračunaj vrijednost izraza za $a = 12$

a) $\left[(a - 10)\cdot a - 8\right]\cdot a - 6 =$ (R: 186)

b) $\left[(a + 24) : a + 9\right] : a =$ (R: 1

18) Izračunaj vrijednost izraza za $a = -\frac{1}{2}$,

$b = 1$

$\dfrac{a^3 + 2a^2b + ab^2}{3a^2 + 3ab}$ (R: $-\frac{1}{2}$)

19) Izračunaj $M - N$, ako je

$M = (3,25 + \frac{3}{5} + 0,4 - 8,5) : (-4\frac{1}{4})$

$N = 3,25 + \frac{3}{5} + 0,4 - 8,5 : (-4\frac{1}{4})$

(R: $M=1$; $N=6,25$; $M-N = -5,25$)

2o) Izračunaj brojevnu vrijednost izraza

$A = \frac{a+b}{2}$, $G = \sqrt{a.b}$, $H = \frac{G^2}{A}$ ako je $a = 5$, $b = 45$

i pokaži da je $A > G > H$

(R: $A = 25$, $G = 15$, $H = 9$)

21) Ako je $x = -2$, $y = 4$, $z = \frac{1}{3}$, $a = -1$, $b = \frac{1}{2}$, pokaži

da je onda:

a) $\frac{3y^2 - 4x}{ax + by} = 14$

b) $(\frac{y}{x})^3 - 4(\frac{a}{b})^2 - \frac{xy}{z^2} = 48$

22) Izračunaj na tri decimale točno vrijednost izraza:

$A = \frac{1o(a-b)\sqrt{a}}{a + b}$ ako je

a) $a = 0,o1$ $b = 0,oo1$ (R: 0,818...)

b) $a = \frac{1}{4}$ $b = \frac{1}{8}$ (R: 1,666...)

POTENCIJE I OPĆI BROJEVI

Ponovimo definiciju i osnovna pravila o potencijama

DEFINICIJA: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdots\cdots a}_{n\ -\ puta} = a^n$ n - prirodan broj, a - realan broj

Npr.:

1/ a) $7^4 = 7.7.7.7 = 49 \cdot 49 = 2401$

b) $(-\frac{1}{2})^3 = (-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2}).(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8}$

c) $(-0,2)^4 = (-0,2).(-0,2).(-0,2).(-0,2) = 0,0016$

d) $(\sqrt{3})^6 = \sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3}.\sqrt{3} = 3.3.3 = 27$

e) $(-2)^4 - 2^4 = 16 - 16 = 0$

f) $0^n = 0$

g) $(-a)^6 = a^6$

h) $1^n = 1$

j) $(-1)^n = \begin{cases} +1, & \text{ako je } n \text{ paran broj} \\ -1, & \text{ako je } n \text{ neparan broj} \end{cases}$

Posljednji primjer pokazuje da predznak vrijednosti potencije zavisi od eksponenta, ako je baza potencije negativna.

OPĆENITO: Ako je baza potencije negativna, onda je vrijednost potencije pozitivna ako je eksponent paran, a negativna ako je eksponent neparan.
A sada ovo pravilo napišimo pomoću općih brojeva:

./.

$(-a)^{2n} = a^{2n}$
$(-a)^{2n+1} = -a^{2n+1}$

$a > 0$

2n - paran broj

2n+1 - neparan broj

n - prirodni broj

Zbrajanje i oduzimanje (reduciranje) potencija moguće je samo u slučaju ako potencije imaju jednake baze i jednake eksponente.

Npr.:

2/ a) $a^n + a^n = 2a^n$

b) $2a^5 + 3a^4 - 5a^4 + 7a^5 = 3a^5 - 2a^4$

c) $8a^x - 5x^a + 7x =$ ne možemo reducirati. Zašto?

Potencije JEDNAKIH BAZA množimo i dijelimo po pravilima:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad m > n$$

Npr.

3/ a) $(-2)^3 \cdot (-2)^2 = (-2)^5 = -32$

b) $8a^8 : 2a^5 = 4a^3$

c) $\frac{a^{n+3}}{a^{n-1}} = a^{n+3-(n-1)} = a^{n+3-n+1} = a^4$

d) $(x-2y)^3 \cdot (x-2y) = (x-2y)^{3+1} = (x-2y)^4$

e) Zašto ne možemo pomnožiti a^2 sa b^3 ?

Potencije JEDNAKIH EKSPONENATA množimo i dijelimo po pravilima:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n \qquad b \neq 0$$

Npr.:

4/ a) $(\frac{3}{2})^3 \cdot (\frac{4}{3})^3 = (\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3})^3 = 2^3 = 8$

b) $0,4^4 : 0,02^4 = (0,4 : 0,02)^4 = 20^4 = 160000$

c) $(\frac{5}{7})^x : 2^x = (\frac{5}{7} : 2)^x = (\frac{5}{7} \cdot \frac{1}{2})^x = (\frac{5}{14})^x$

d) $0,2^2 \cdot 0,01^2 : 0,1^2 = (0,2 \cdot 0,01 : 0,1)^2 = 0,02^2 = 0,0004$

Potenciranje potencije izvodimo po pravilu:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Npr.:

5/ a) $[(a^2)^3]^5 = a^{2 \cdot 3 \cdot 5} = a^{30}$

b) $[(-a^2)^3]^5 = (-a^2)^{15} = -a^{30}$

c) $(a^2b^3) = (a^2)^4 \cdot (b^3)^4 = a^8b^{12}$

d) $(\frac{a^2b}{2c^3})^3 = \frac{(a^2)^3 \cdot b^3}{2^3 \cdot (c^3)^3} = \frac{a^6b^3}{8c^9}$

e) $(\frac{2^3 \cdot 2^4}{2^5})^3 = (2^{3+4-5})^3 = (2^2)^3 = 2^6 = 64$

f) $(\frac{x^2y^2}{2z^3})^2 \cdot (\frac{z^2}{y})^3 = \frac{x^4y^4}{4z^6} \cdot \frac{z^6}{y^3} = \frac{x^4y^{4-3}}{4} = \frac{1}{4}x^4y$

g) $\left[\frac{3 \cdot (-3)^2 + 4 \cdot (-2)^3}{2^3 - 3^2}\right]^3 = \left[\frac{3 \cdot 9 + 4 \cdot (-8)}{8 - 9}\right]^3 = (\frac{27 - 32}{-1})^3 =$

$= (\frac{-5}{-1})^3 = 5^3 = 125$

6/ Reduciraj:

a) $3x^3 - 7y^3 + 9x^3 - 2y^3 - 5x^3 =$ (R: $7x^3 - 9y^3$)

b) $3x^2y + 5xy^2 - 3x^2y - 11xy^2 + x^2y =$ (R: $x^2y - 6xy^2$)

c) $8a^x - 5x^a + a^x - 7x^a - 3a^x =$ (R: $6a^x - 12x^a$)

d) $mn^2 + \frac{3}{4}mn^2 =$ (R: $\frac{7}{4}mn^2$)

e) $3a^xb - 5a^xb^x =$ (R: ne može)

f) $4x^2 - \{3x^2 - 2[y - 3(x^2 - y)] + 4\} =$ (R: $-5x^2 + 8y - 4$)

7/ Izračunaj:

a) $(-4m^2n^2) \cdot \frac{1}{2}mn^2 =$ (R: $-2m^3n^5$)

b) $24m^4n^5y : (-3m^2n^2y) =$ (R: $-8m^2n^2$)

c) $(-3m^2n^4x^3y)^3 =$ (R: $-27m^6n^{12}x^9y^3$)

d) $(3a^5 - 4a^4) . (-2a^5 =$ (R: $-6a^{10} + 8a^9$)

e) $a^{2x+5} : (a^{2x+1} : a^{x+1}) =$ (R: a^{x+5})

8/ Izračunaj:

a) $a^{x+1} : a^{x-1} =$ (R: a^2)

b) $\frac{2^{3m+4}}{2^{2+3m}} =$ (R: 4)

c) $\frac{5^7}{5^4} + \frac{2^{10}}{8^2 \cdot (-2)^3} - 4(-3)^4 =$ (R: -201)

d) $(-3x^2y)(4xy^2)(-2x^3y^4) =$ (R: $24x^6y^7$)

e) $(x^2 - 3xy + y^2)(4xy^2) =$ (R: $4x^3y^2 - 12x^2y^3 + 4xy^4$)

f) $\frac{-16a^4b^6}{-8ab^2c} =$ (R: $\frac{2a^3b^4}{c}$

g) $(12x^5y^2 + 8x^4y^3 - 4x^3y^4) : 4x^3y^2 =$ (R: $3x^2 + 2xy - y^2$)

9/ Raspravi slijedeća pitanja:

a) Može li se tvrditi da je $a + a > a$

b) Što je veće: $a + 2$ ili $a + b - 5$, ako je $b < 7$?

c) Je li istinita tvrdnja $(a > b) \Longrightarrow (a^2 > b^2)$?

d) Kada je $2a < a$?

e) Je li istinita tvrdnja $(a \neq 0,\ b \neq 0) \Longrightarrow (a + b) \neq 0$?

f) Što znadeš reći o brojevima a i b, ako su oni vezani relacijama:

1) $a + b = 0$

2) $a \cdot b > 0$

3) $a \cdot b < 0$

4) $a \cdot b = 0$

Odgovori:

a) Ne može se jer je gornja vrijednost ispravna samo za pozitivne vrijednosti varijable a, tj. ako je $a > 0$.

b) Veće je $a + 2$

c) Nije uvijek.

d) Ako je a negativan broj, tj. ako je $a < 0$

e) Nije istinita u slučaju ako su a i b suprotni brojevi, tj. ako je $a = -b$

f) 1. $a = -b$

2. a i b su istoga predznaka

3. a i b su suprotnog predznaka

4. $a = 0$ ili $b = 0$ ili $a = 0$ i $b = 0$

Dvočlani izraz nazivamo binom. Binom se kvadrira po pravilu:

$$(I \pm II)^2 = I^2 \pm 2.I.II + II^2$$

prvi član drugi član

Npr.:

1o/ a) $(7x^2 - 2xy)^2 = (7x^2)^2 - 2 \cdot 7x^2 \cdot 2xy + (2xy)^2 =$

$= 49x^4 - 28x^3y + 4x^2y^2$

b) $(a - 2b + 3c)^2 = ?$ ovo je trinom, ali ga možemo pretvoriti u binom tako da grupiramo dva člana.

Dakle:

$(a - 2b + 3c)^2 = \left[(a - 2b) + 3c\right]^2 = (a - 2b)^2 + 2\,(a-26).3c +$

$+ (3c)^2 = a^2 - 4ab + 4b^2 + 6ac - 12bc + 9c^2 =$

$= a^2 + 4b^2 + 9c^2 - 4ab + 6ac - 12bc$

11/ Izračunaj:

a) $(3x + 5y)^2 =$ (R: $9x^2+30xy+25y^2$)

b) $(a^2 + \frac{1}{2}b)^2 - (a^2 - \frac{1}{2}b)^2 - 2a^2b - 8a^2b^4 : (-4ab^2)$ (R: $2ab^2$)

c) $(a + b + c)^2 =$ (R: $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$)

d) $(a^2 - a - 1)^2 - (a^2 + a - 1)^2$ (R: $-4a^3 + 4a$)

12/ Izračunaj:

$(MN)^2 - P^2$ ako je: (R: $12x^4 - x^2y^2$)

$M = 2x - \frac{y}{2}$ $N = 2x + \frac{y}{2}$ $P = 2x^2 - \frac{y^2}{4}$

LINEARNA JEDNADŽBA SA JEDNOM VARIJABLOM

Svaka jednadžba, koja se dade svesti na oblik $ax + b = 0$, $a \neq 0$, se zove linearna jednadžba s jednom varijablom (ovdje se x smatra varijablom)

Iz $ax + b = 0,\ a \neq 0$ slijedi rješenje $x = -\frac{b}{a}$

Npr.:

1/ a) $3x + 2 = 0$

$3x = -2 \quad | : 3$

$x = -\frac{2}{3}$

b) $2x - c = 0$

$2x = c \quad | : 2$

$x = \frac{c}{2}$

c) $-0,2x + 1 = 0 \quad | \cdot (-1)$

$0,2x - 1 = 0$

$0,2x = 1 \quad | : 0,2$

$x = \frac{1}{0,2}$

$x = 5$

d) $mx - n = 0$

$mx = n \quad | : m \neq 0$

$x = \frac{n}{m}$

Ako dijelimo općim brojem, moramo naglasiti da to vrijedi uz uvjet da je taj opći broj različit od nule (Prisjeti se da dijeljenje nulom

nije definirano).

Iz navedenih primjera primjećujemo da se ove jednadžbe jednostavno rješavaju ako su one u SREĐENOM obliku, tj. u obliku $ax + b = 0$, $a \neq 0$.

U praksi često susrećemo linearne jednadžbe koje nisu u sređenom obliku zato ćemo na slijedećem primjeru objasniti postupak pri rješavanju linearne jednadžbe kakvu susrećemo u praksi.

2/ $\frac{2x}{5} - \frac{28}{15} = \frac{8x}{9} - \frac{4x-2}{3} \quad \Big| \cdot 45$ (1)

$18x - 84 = 40x - 15(4x-2)$ (2)

$18x - 84 = 40x - 60x + 30$ (3)

$18x - 40x + 60x = 84 + 30$ (4)

$78x - 40x = 114$

$38x = 114 \quad \Big| : 38$ (5)

$x = \frac{114}{38}$

$\boxed{x = 3}$

Pokus:

$\frac{2 \cdot 3}{5} - \frac{28}{15} = \frac{8 \cdot 3}{9} - \frac{4 \cdot 3 - 2}{3}$ (6)

$\frac{6}{5} - \frac{28}{15} = \frac{24}{9} - \frac{10}{3} \quad \Big| \cdot 45$

$54 - 84 = 120 - 150$

$\underline{-30 = -30}$

Općenito postupak pri rješenju linearne jednadžbe s jednom varijablom možemo skupiti u slijedećih šest koraka:

1) Ako u jednadžbi dolaze razlomci, oslobađamo se razlomka množenjem jednadžbe najmanjim zajedničkim nazivnikom.

2) Ako u jednadžbi dolaze zagrade, oslobađamo se zagrada tako da izvršimo naznačene računske operacije.

3) Članovi koji sadrže nepoznanicu, prenose se na lijevu stranu, a poznati članovi na desnu stranu, pri čemu članovi, koje prenosimo s jedne strane na drugu, mijenjaju predznak.

4) Na svakoj se strani vrši reduciranje istoimenih članova (ili se izluči zajednički faktor, ako su koeficijenti uz nepoznanicu opći brojevi).

5) Jednadžba se dijeli koeficijentom uz nepoznanicu (uz uvjet da on nije nula).

6) Pokus. Rješenje jednadžbe se uvrštava u početnu jednadžbu, a zatim izvrše naznačene operacije, dok na lijevoj i na desnoj strani ne dobijemo isti izraz.
Navedeni koraci se temelje na osnovnim poučcima i aksiomima koji garantiraju da se iza svake navedene transformacije dobije jednadžba koja je ekvivalentna s prethodnom (prisjeti se da se jednadžbe, koje imaju jednaka rješenja, nazivaju ekvivalentne jednadžbe).

3/ $\{x - 5a - 2b - [3a - (b-5x)]\} = 5x - (a-2b)$

$\{x - 5a - 2b - [3a - b + 5x]\} = 5x - a + 2b$

$\{x - 5a - 2b - 3a + b - 5x\} = 5x - a + 2b$

$x - 5a + \cancel{2b} + 3a - b + \cancel{5x} = \cancel{5x} - a + \cancel{2b}$

$x = 5a - 3a + b - a$

$x = a + b$

Napravi pokus !

4/ $a\ (x-3) = 6\ (x+5)$

$ax - 3a = 6x + 5b$

$ax - 6x = 3a + 5b$

$(a-b)x = 3a + 5b \quad \Big| : (a-b) \neq 0 \qquad a \neq b$

$$\boxed{x = \frac{3a + 5b}{a - b}}$$

Napravi pokus !

Brojeve kao što su a, b, c, ... x, y, z ... nazivamo opći brojevi. Obično je u jednadžbi varijabla x, y, z ..., ali to ne znači da se ne može pojaviti i neko drugo slovo. Zato se obično naglasi što je u jednadžbi varijabla (često se kaže nepoznanica).

Npr.:

5/ a) $P = \frac{v}{2}\ (a+b) \quad \Big| \cdot 2 \qquad v = ?$

$2\ P = v\ (a+b)$

$v\ (a+b) = 2P \quad \Big| : (a+b) \neq 0$

$$\boxed{v = \frac{2P}{a + b}}$$

b) $P = \frac{v}{2}\ (a+b) \quad \Big| \cdot 2 \qquad a = ?$

$2P = v\ (a+b)$

$2P = av + bv$

$av = 2P - bv \quad \Big| : v \neq 0$

$$\boxed{a = \frac{2P - bv}{v}}$$

6/ Riješi zadane jednadžbe (varijabla je x)

a) $(x-1)(x-2) = (x+1)^2$ (R: $\frac{1}{5}$)

b) $x(x-1)(x-2) = (x-1)^3$ (R: 1)

c) $2x - \frac{2x-11}{2} = \frac{19-2x}{2}$ (R: 2)

d) $\frac{3(x-3)}{4} - 15 - \frac{2x-3}{6} = \frac{5(2-x)}{3} + \frac{3}{4}$ (R: 1o)

e) $3x - \left[\frac{x-2}{3} - (x + \frac{1-x}{3} + \frac{11}{25}) - 5x\right] - 2 = -\frac{14}{25}$ (R: 0)

f) $3(x-a) + 2(x-b) = 2(x-a) - 3(x+b)$ (R: $\frac{a-b}{6}$)

g) $\frac{x-a}{b} + 1 = \frac{x+b}{a} - 1$ (R: $x = \frac{(a-b)^2}{a-b} = a-b$)
$a \neq b$

7/ Riješi zadane jednadžbe po varijabli koja je naznačena.

a) $\frac{1}{r} + 3 = \frac{9}{r} - \frac{2}{r}$ (R: $r = 2$)

b) $0{,}1(1ooo-y) + 0{,}o7(2ooo-y) = 1o4$ (R: $y = 8oo$)

c) $ax - by = cz \quad x = ?$ (R: $x = \frac{by + cz}{a}$)

d) $S = \frac{M}{2}(a + \ell) \quad a = ?$ (R: $a = \frac{25}{n} - \ell$)

e) $\ell = a + (n-1)d \quad n = ?$ (R: $n = \frac{\ell - a}{d} + 1$)

8/ Zadani su algebarski izrazi:

$A = 3a + 16, \quad B = 14 - 5a, \quad C = 12a - 1o$

Odredi varijablu a tako da bude:

a) $A - B + C = 32$ (R: $a = 2$)

b) $4A - C = B$ (R: $a = -12$)

9/ Odredi A, ako je $A = x^2 - 2x - 3$, $x = 1 - 2m$ i $2(m+3) - 1 = 3$

(R: $A = 4m^2 - 4$
$m = -1$ $A = 0$)

1o/ Koju vrijednost mora imati m u jednadžbi

$$(5+x)(m+x) = (2m-x)(3-x) + 1,$$

da bi ova jednadžba imala isto rješenje kao jednadžba

$$\frac{2x-1}{6} - \frac{x+1}{9} = 1 - \frac{3x+4}{12}$$

Uputa: Treba riješiti obe jednadžbe po varijabli x, zatim njihova rješenja izjednačiti i iz tako dobivene jednadžbe odrediti m

(R: $x = 2$, $m = -3$)

11/ Izračunaj x iz jednadžbe $a(x+a)-b(x-b) = a - b - 1$,

ako je $a - \frac{a-1}{4} - \frac{2a-1}{9} = 4 - \frac{1+a}{6}$, a

$$3(b+3)(3b-2) - (3b+1)^2 = 5b+1.$$

Pokaži da je za dobivene vrijednosti a, b i x točna jednakost

$-x = a + 2b.$

SLOŽENI ZADACI

1/ Izračunaj:

a) $$A = \underbrace{\frac{0,2^4 \cdot 0,004 \cdot \sqrt{\frac{0,48}{0,0003}}}{0,4^3 \cdot 0,005^2}}_{a} : \underbrace{\frac{25^2 \cdot 0,4 - 0,64 \cdot 75 : 0,32}{56,25 \cdot 0,8 - 100 \cdot 0,35}}_{b}$$

(R: $a : b = 0,16$)

b) $$A = \frac{-4 - \frac{2}{3} : \left(-\frac{1}{5}\right) : \left(2+\frac{2}{3}\right) \cdot (-6) - \frac{4}{5}\left(\frac{5}{8}-1\right)}{-\frac{3}{4} - 4\left[-\frac{2}{3} + \frac{7}{12} : (-14)\right]} \cdot \frac{6p}{41}$$

(Uputa: B = brojnik, N = nazivnik $\frac{B}{N} \cdot \frac{60}{41} = \frac{6}{25}$)

c) $$A = 8 : \frac{2}{3} - 1,8 : \frac{2,4}{\frac{5}{3} \cdot 0,06 \cdot \frac{48}{3 : \frac{2}{3}}} - \frac{1}{5} + \frac{32 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0,25}}{8 - \frac{21}{3-4,8 \cdot 0,8}}$$

(R: $A = 12$)

2/ Od kojeg broja 0,36% iznosi:

$$i = \frac{4 \cdot 0,72 : 0,002 - 0,108 : (0,0004 : 4)}{(2 : 0,04 - 0,7^2 : 0,01) \cdot 0,01}$$

(R: $i = 36000$, $g = 10^7$)

3/ Riješi jednadžbu:

$$\frac{\frac{3x-5}{2} - 1}{4} = \frac{4(2x-7)}{9} + \frac{3 - \frac{5(x-2)}{3}}{3} + \frac{13}{24}$$

(R: $x = 10$)

4/ A, upitan koliko ima godina, nije se mogao odlučiti da direktno kaže, već odgovori ovako:
Ako treba da doživim 90 godina, $\frac{5}{6}$ od $\frac{3}{5}$ mojih godina premašuju za $\frac{5}{3}$ godine $\frac{2}{3}$ od $\frac{7}{8}$ godina koje još treba da proživim.

Koliko A ima godina?

(Uputa: Ako A ima x godina onda mora biti:

$x \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{8}(9o-x) + \frac{5}{3}$ $x \Rightarrow 5o$).

5/ Od kojeg je broja $7\frac{1}{5}$ % jednako 0,o48 ? (R: $\frac{2}{3}$)

6/ Turist pođe u 8 sati i prevaljuje svakog sata 4 km. U lo sati i 3o minuta krene za njim njegov prijatelj koji prevaljuje svakog sata 6 km.
Odredi kada će ga stići i u kojoj udaljenosti od polaznog mjesta. Zadatak riješi grafički. (R: 15^h 3o' / 3o km)

7/ Nađi razlomak kod kojega je suma brojnika i nazivnika lo, a brojnik je od nazivnika manji za 4. (R: $\frac{3}{7}$)

8/ U nekom razredu ima dva puta više učenika nego učenica. Oboli jedan učenik i tri učenice. Sada se broj učenika prema broju učenica odnosi kao 5 : 2.
Koliko je bilo učenika a koliko učenica u tom razredu? (R: 26, 13).

- - o - -

S A D R Ž A J

Strana:

- - o - -

- o -

o